

**Горный институт УрО РАН
Лаборатория ПТС**

DFilter V0.9

Расчет цифровых фильтров и цифровая фильтрация

Справочная информация

Составил Дягилев Р.А.

Май 2008 г.

Содержание

1. Общие сведения	3
2. Список сокращений	4
3. Теоретические представления, используемые в <i>DFilter</i>	5
3.1. Способы задания цифровых фильтров	5
3.2. Рекурсивные фильтры	6
3.2.1. Фильтры Баттерворта	6
3.2.1.1. Фильтр нижних частот	6
3.2.1.2. Фильтр верхних частот	12
3.2.1.3. Полосовой фильтр	15
3.2.1.4. Полосовой заградительный фильтр	18
3.2.2. Фильтры Чебышева	19
3.2.3. Режекторный фильтр	20
3.2.4. Селекторный фильтр	23
3.2.5. Билинейное Z -преобразование	24
3.3. Уточнение корней полинома	26
3.3.1. Уточнение частоты среза	26
3.3.2. Уточнение амплитуды	27
3.3.3. Уточнение полюсов и нулей	27
4. Порядок работы	28
4.1. Описание элементов приложения	28
4.1.1. Главное меню	28
4.1.2. Панель инструментов	30
4.1.3. Панель параметров	31
4.1.3.1. Расчет фильтров	31
4.1.3.2. Передаточная функция	32
4.1.3.3. Аппроксимация	34
4.1.3.4. Настройки	35
4.1.3.5. Калькулятор	35
4.1.4. Диаграммы	36
4.1.4.1. Диаграмма графиков	36
4.1.4.2. Комплексная плоскость	37
4.1.5. Строка статуса	38
4.2. Расчет элементарных фильтров	38
4.3. Аппроксимация	39
4.3.1. Аппроксимация элементарными фильтрами	39
4.3.2. Аппроксимация каскадом фильтров	40
4.3.2.1. Формирование каскада	41
4.3.2.2. Использование готового каскада	42
4.4. Фильтрация	42
4.5. Трансформации передаточных функций	42
4.5.1. S - $ZP \rightarrow FAP$, Z - $ZP \rightarrow FAP$, S - $C \rightarrow FAP$ и Z - $C \rightarrow FAP$	44
4.5.2. S - $ZP \rightarrow Z$ - ZP	44
4.5.3. Z - $ZP \rightarrow S$ - ZP	45
4.5.4. S - $ZP \rightarrow S$ - C , Z - $ZP \rightarrow Z$ - C	45
4.5.5. S - $C \rightarrow S$ - ZP , Z - $C \rightarrow Z$ - ZP	46
4.5.6. АЧХ \rightarrow ФЧХ	46
4.5.7. $FAP \rightarrow ZP$, C	47
4.5.8. Другие виды преобразований	47
5. Литература	49

1. Общие сведения

Назначение:

Создание и подбор рекурсивных цифровых фильтров (РЦФ) с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ). Цифровая фильтрация произвольных временных рядов.

Решаемые задачи:

- создание простых фильтров Баттерворта (ФНЧ, ФВЧ, РФ, СФ, ПФ, ПЗФ);
- представление передаточной функции цифровых фильтров в виде полюсов и нулей (ZP) и в виде каскада (C) биквадратных блоков как на Z -, так и на S -плоскости, а также в виде дискретных значений частотной характеристики (FAP);
- преобразование передаточной функции из S -плоскости в Z -плоскость и наоборот;
- преобразование передаточной функции из полюсов и нулей в коэффициенты каскада биквадратных блоков;
- аппроксимация передаточной функции, заданной в виде FAP , любым аналитическим представлением для элементарных типов фильтров;
- формирование сложных полиномов посредством кусочной аппроксимации FAP ;
- цифровая фильтрация произвольного временного ряда.

Версии

Сентябрь 2007 г.

возникновение идеи проекта.

0.1.0.0, 22 марта 2008 г.

реализация основных возможностей создания фильтров, разработка формата хранения ЧХ, реализация аппроксимации ЧХ и разработка инструкции по аппроксимации.

0.8.0.0, 16 мая

реформа интерфейса, реализация сложной аппроксимации ЧХ.

0.9.0.0, 4 июня

разработка справочной системы.

2. Список сокращений

<i>C</i>	передаточная функция, заданная в виде каскада (<i>Cascade</i>) биквадратичных блоков.
<i>S-C</i>	передаточная функция, заданная в виде каскада (<i>Cascade</i>) биквадратичных блоков на <i>S</i> -плоскости.
<i>Z-C</i>	передаточная функция, заданная в виде каскада (<i>Cascade</i>) биквадратичных блоков на <i>Z</i> -плоскости.
<i>FAP</i>	передаточная функция, заданная в виде набора дискретных точек в частотной области: частота (<i>Frequency</i>), амплитуда (<i>Amplitude</i>) и фаза (<i>Phase</i>).
<i>ZP</i>	передаточная функция, заданная в виде полюсов и нулей (<i>Zeroes and Poles</i>).
<i>S-ZP</i>	передаточная функция, заданная полюсами и нулями на <i>S</i> -плоскости.
<i>Z-ZP</i>	передаточная функция, заданная полюсами и нулями на <i>Z</i> -плоскости.
АЧХ	амплитудно-частотная характеристика.
БИХ	бесконечная импульсная характеристика.
ГВЗ	групповое время задержки.
КИХ	конечная импульсная характеристика.
ПЗФ	полосовой заградительный фильтр.
ПФ	полосовой фильтр.
ПФФ	передаточная функция фильтра.
РФ	режекторный фильтр.
РЦФ	рекурсивный цифровой фильтр.
СФ	селекторный фильтр.
ФВЧ	фильтр верхних частот.
ФНЧ	фильтр нижних частот.
ФЧХ	фазо-частотная характеристика.
ЧХ	частотная характеристика.

3. Теоретические представления, используемые в *DFilter*

3.1. Способы задания цифровых фильтров

Цифровые фильтры можно задать четырьмя способами:

1. Корнями (полюсами и нулями) на S -плоскости (плоскость преобразования Лапласа)

$$H(s) = G_S \frac{\prod_{i=1}^{Ns_n} (s - s_{ni})}{\prod_{i=1}^{Ns_p} (s - s_{pi})}, \quad (3.1.1)$$

где

s_n – нули,

s_p – полюсы,

Ns_n – количество нулей,

Ns_p – количество полюсов,

G_S – нормирующий коэффициент,

$s = j\omega$ – комплексная переменная частоты в S -плоскости, где $\omega = 2\pi f$.

Аналогом S -плоскости может выступать ее разновидность P -плоскость в которой переменные меньше в k раз. k является нормой для приведения частот к относительной шкале. На такой шкале частота среза (для ФВЧ и ФНЧ, $k = \omega_c$) или средняя геометрическая частота (для ПФ, $k = \omega_0$) всегда равны 1, и все корни-полюсы лежат на единичной окружности. P -плоскость непосредственно не используется и нужна только как промежуточное пространство для нахождения корней уравнения (3.1.1), что будет продемонстрировано в главе 3.2.

2. Корнями (полюсами и нулями) на Z -плоскости (Z -преобразование)

$$H(z) = G_Z \frac{\prod_{i=1}^{Nz_n} (z - z_{ni})}{\prod_{i=1}^{Nz_p} (z - z_{pi})}, \quad (3.1.2)$$

где

z_n – нули,

z_p – полюсы,

Nz_n – количество нулей,

Nz_p – количество полюсов,

G_Z – нормирующий коэффициент,

$z = e^{j\omega} - \text{комплексная переменная частоты на } Z\text{-плоскости, где } \omega = 2\pi f \Delta t.$

3. Полиномом на S - или Z -плоскости с вещественными коэффициентами a и b

$$H(z) = G \frac{\sum_{i=0}^{Nz_n} b_i z^i}{1 + \sum_{i=1}^{Nz_p} a_i z^i}. \quad (3.1.3)$$

Коэффициенты a и b полинома на Z -плоскости можно использовать для фильтрации во временной области:

$$y_k = \sum_{i=0}^{Nz_n} b_i x_{k-i} - \sum_{i=1}^{Nz_p} a_i y_{k-i}, \quad (3.1.4)$$

где

x – исходный временной ряд,

y – временной ряд после фильтрации.

4. Дискретным набором точек в частотной области

Это самый простой способ представления фильтра, в котором его частотная характеристика задана непосредственно через параметры амплитуды и фазы для некоторого набора частот (*FAP*). Простота и наглядность способа представления сочетается с некоторыми сложностями его практического использования (необходимость интерполяции между точками, неопределенность значений за пределами заданного диапазона, ресурсоемкость фильтрации длинных рядов, невозможность потоковой фильтрации).

Любой фильтр можно представить в виде произведения N секций:

$$H(z) = \prod_{i=1}^N h_i(z), \quad (3.1.5)$$

$$H(s) = \prod_{i=1}^N h_i(s), \quad (3.1.5')$$

что позволяет упростить расчет корней и коэффициентов, сводя секции к полиномам низших порядков (например, 1-го или 2-го порядка).

Корни полиномов – полюсы и нули – обычно являются либо комплексно-сопряженными либо вещественными величинами, поэтому их можно группировать, получая секции 1-го или 2-го порядка. Правила группировки могут быть следующими:

- 1) комплексно-сопряженные пары корней при группировке образуют полином 2-го порядка;
- 2) два вещественных корня при группировке образуют полином 2-го порядка;
- 3) один вещественный корень образует полином 1-го порядка.

Таким образом, передаточную функцию $H(z)$ с комплексной переменной z – не важно, в Z - или S -плоскости она задана – можно представить как:

$$H(z) = G \prod_{i=1}^N \frac{(z - z_{ni})(z - z_{ni}^*)}{(z - z_{pi})(z - z_{pi}^*)} = \prod_{i=1}^N \frac{b_{i0} + b_{i1}z + b_{i2}z^2}{1 + a_{i1}z + a_{i2}z^2}. \quad (3.1.6)$$

Используя форму представления (3.1.5), любую передаточную функцию можно представить в виде произведения более сложных секций, являющихся функциями вида (3.1.1), (3.1.2), (3.1.3) или (3.1.6).

3.2. Рекурсивные фильтры

Синтез рекурсивных цифровых фильтров (РЦФ) непосредственно в Z -области возможен только для фильтров простого типа (режекторных и селективных) с ограниченным количеством полюсов и нулей (особых точек). В общем случае, процесс проектирования рекурсивного частотного фильтра обычно заключается в задании необходимой передаточной характеристики фильтра в частотной области и ее аппроксимации с определенной точностью какой-либо непрерывной передаточной функцией, с последующим Z -преобразованием для перехода в Z -область. Первые две операции хорошо отработаны в теории аналоговой фильтрации сигналов, что позволяет использовать для проектирования цифровых фильтров большой справочный материал по аналоговым фильтрам ([Давыдов, 2005](#)). Последняя операция является специфичной для цифровых фильтров.

Для алгебраического преобразования непрерывной передаточной функции в многочлен по z используется билинейное преобразование, известное в теории комплексных переменных под названием дробно-линейного преобразования.

3.2.1. Фильтры Баттерворта

3.2.1.1. Фильтр нижних частот

Передаточная функция

Гладкий вид амплитудно-частотной характеристики фильтра Баттерворта (рис.

3.2.1.1.1) задают квадратом передаточной функции вида:

$$|H(W)|^2 = H(W)H^*(W) = 1/(1+W^{2N}),$$

где $W = \omega/\omega_c$ – нормированная частота, ω_c – частота среза АЧХ фильтра, на которой $|H(\omega)|^2 = 1/2$ (соответственно $H(\omega) = 0.707$), N – порядок фильтра, определяющий крутизну среза АЧХ.

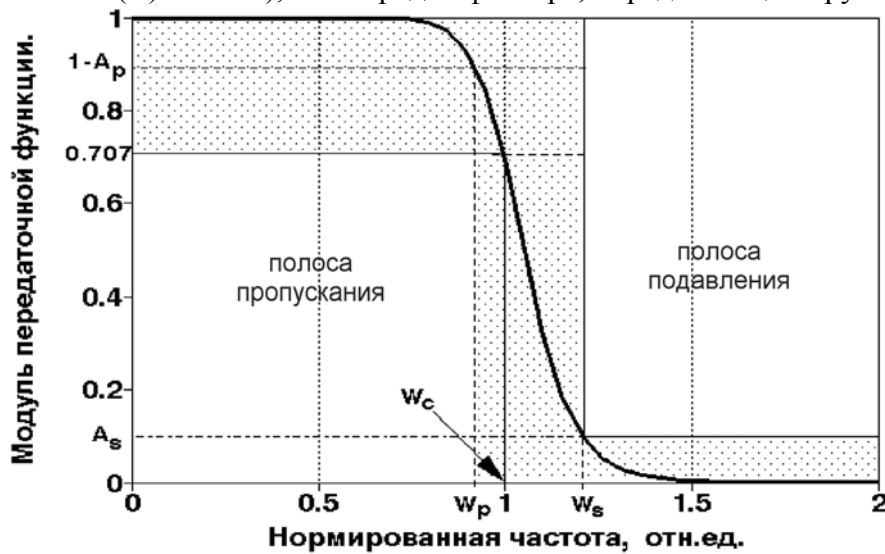


Рис. 3.2.1.1.1. АЧХ фильтра Баттерворта

При $W \rightarrow 0$ коэффициент передачи фильтра стремится к 1. Учитывая, что результаты вычислений будут относиться к цифровым фильтрам и при Z -преобразовании с переходом в главный частотный диапазон произойдет искажение частот, до начала расчетов фактические значения задаваемых частотных характеристик (значения ω_c , ω_p и ω_s) следует перевести в значения деформированных частот по выражению:

$$\omega_0 = (2/\Delta t) \operatorname{tg}(\omega \Delta t/2) = \gamma \operatorname{tg}(\omega \Delta t/2), \quad -\pi/\Delta t < \omega < \pi/\Delta t. \quad (3.2.1.1.1)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$\omega = (2/\Delta t) \operatorname{arctg}(\omega_0 \Delta t/2). \quad (3.2.1.1.1')$$

Крутизна среза

Наклон частотной характеристики фильтра при переходе от области пропускания к области подавления можно характеризовать коэффициентом крутизны среза фильтра K в децибелах на октаву:

$$K = 20 \lg |H(\omega_2)/H(\omega_1)|, \quad (3.2.1.1.2)$$

где ω_1 и ω_2 – частоты с интервалом в одну октаву, т.е. $\omega_2 = 2\omega_1$.

Длительность импульсной реакции фильтра в пределах ее значимой части также зависит от крутизны среза: чем больше крутизна, тем больше длительность импульсного отклика фильтра.

Порядок фильтра

Принимая $\omega_1 = W_c$, $\omega_2 = W_s$ и подставляя в (3.2.1.1.2) значения $H(W)$ с приведенными данными, получим приближенное выражение для определения порядка фильтра по заданному значению K :

$$N = K/6. \quad (3.2.1.1.2')$$

Так, для гарантированного ослабления сигнала в полосе подавления в 100 раз (40 децибел) порядок фильтра $N = 7$. В среднем, при изменении N на единицу коэффициент подавления сигнала изменяется на 6 децибел.

Исходные требования к передаточной функции фильтра обычно задаются в виде значений ω_p , ω_s и коэффициентов неравномерности (пульсаций) A_p и A_s (см. рис. 3.2.1.1.1). Для

определения частоты среза ω_c по уровню 0.707 и порядка фильтра введем параметр δ , связанный с коэффициентом A_p следующим соотношением:

$$(1-A_p)^2 = 1/(1+\delta^2).$$

$$\delta = [1/(1-A_p)] \cdot \sqrt{1-(1-A_p)^2}. \quad (3.2.1.1.3)$$

Для учета деформации частотной шкалы в процессе билинейного преобразования при переходе в дальнейшем к полиномам по Z , выполняем расчет деформированных частот ω_{dp} и ω_{ds} по формулам:

$$\omega_{dp} = 2 \cdot \text{tg}(\omega_p \cdot \Delta t / 2) / \Delta t, \quad (3.2.1.1.4)$$

$$\omega_{ds} = 2 \cdot \text{tg}(\omega_s \cdot \Delta t / 2) / \Delta t.$$

При нормированной частоте $W = \omega / \omega_{dc}$, где ω_{dc} соответственно также деформированная частота, на границах переходной зоны выполняются равенства:

$$1/(1+\delta^2) = 1/[1+(\omega_{dp}/\omega_{dc})^{2N}], \quad (3.2.1.1.5)$$

$$A_s^2 = 1/[1+(\omega_{ds}/\omega_{dc})^{2N}].$$

Отсюда:

$$\delta^2 = (\omega_{dp}/\omega_{dc})^{2N}, \quad 1/A_s^2 - 1 = (\omega_{ds}/\omega_{dc})^{2N}.$$

Решая эти два уравнения совместно, находим:

$$N = \ln [\delta / \sqrt{1/A_s^2 - 1}] / \ln(\omega_{dp}/\omega_{ds}), \quad (3.2.1.1.6)$$

$$\omega_{dc} = \omega_{dp} / \delta^{1/N}. \quad (3.2.1.1.7)$$

Функция $|H(W)|^2$ представляет собой энергетический спектр сигнала (спектральную плотность мощности) и не имеет фазовой характеристики, т.е. является четной вещественной, образованной из двух комплексно сопряженных функций $H(W)$ и $H^*(W)$, при этом порядок фильтра N определяет число полюсов функции $H(W)$ и комплексно сопряженных с ними полюсов функции $H^*(W)$.

Преобразование Лапласа

Переводим функцию $|H(W)|^2$ на координатную ось пространства преобразования Лапласа при $s = jW$, для чего достаточно подставить $W = p/j$:

$$|H(p)|^2 = 1/[1+(p/j)^{2N}]. \quad (3.2.1.1.8)$$

Полюсы функции находятся в точках нулевых значений знаменателя:

$$1+(p/j)^{2N} = 0, \quad p = j^{2N} \sqrt{-1}. \quad (3.2.1.1.9)$$

Отсюда следует, что полюсы располагаются на единичной окружности в P -плоскости, а их местоположение определяется корнями уравнения (3.2.1.1.9). В полярных координатах:

$$p_n = j \exp(j\pi(2n-1)/2N), \quad n = 1, 2, \dots, 2N. \quad (3.2.1.1.10)$$

$$p_n = j \cos[\pi(2n-1)/2N] - \sin[\pi(2n-1)/2N]. \quad (3.2.1.1.10')$$

При переходе от нормированных частот W (P -плоскость) к реальным ω (S -плоскость) корни (3.2.1.1.10) следует умножить на частоту среза ω_c .

Как следует из формулы (3.2.1.1.10) и наглядно видно на рис. 3.2.1.1.3, все полюсы с $n \geq N$ являются комплексно сопряженными с полюсами $n < N$. Устойчивую минимально-фазовую передаточную функцию фильтра образуют полюсы левой половины P - или S -плоскости:

$$H(p) = G/B(p), \quad (3.2.1.1.11)$$

где G – масштабный множитель, $B(p)$ – полином Баттерворта:

$$B(p) = B_1(p) B_2(p) \dots B_M(p), \quad (3.2.1.1.12)$$

$$B_n(p) = p - p_n. \quad (3.2.1.1.13)$$

Практическая реализация фильтра Баттерворта при четном значении N производится в виде последовательной каскадной схемы биквадратными блоками, т.е. составными фильтрами второго порядка. Для этого множители $B(p)$ в (3.2.1.1.12) объединяются попарно с обоих концов ряда по n (от 1 до N) по комплексно сопряженным полюсам, при этом для каждой пары получаем вещественные квадратичные множители:

$$\begin{aligned} B_m(p) &= B_n(p) \cdot B_{N+1-n}(p) = \\ &= [p + j \exp(j\pi(2n-1)/2N)][p + j \exp(j\pi(2(N+1)-2n-1)/2N)] = \\ &= [p + j \exp(j\pi(2n-1)/2N)][p - j \exp(j\pi(2n-1)/2N)] = \\ &= p^2 + 2p \sin(\pi(2m-1)/2N) + 1, \quad n = 1, 2, \dots, N/2; \quad m = n. \end{aligned} \quad (3.2.1.1.14)$$

Общее количество секций фильтра $M=N/2$. При нечетном N к членам (3.2.1.1.14) добавляется один линейный множитель с вещественным полюсом $p_{(N+1)/2} = -1$, пример положения которого на P -плоскости можно видеть на рисунке 3.2.1.1.3 для $N=5$:

$$B_{(N+1)/2}(p) = p + 1. \quad (3.2.1.1.15)$$

Машинное время фильтрации на один оператор фильтра первого или второго порядка практически не отличаются, поэтому использование операторов первого порядка можно не рекомендовать и при установлении порядка фильтра по формуле (3.2.1.1.6) округлять расчетное значение N в сторону большего четного числа, что создает определенный запас по крутизне среза частотной характеристики.

Таким образом, передаточная функция ФНЧ Баттерворта в P -области при четном N :

$$H(p) = G \prod_{m=1}^M 1/B_m(p) = G \prod_{m=1}^M 1/(p^2 + a_m p + 1), \quad (3.2.1.1.16)$$

$$a_m = 2 \sin(\pi(2m-1)/2N), \quad m = 1, 2, \dots, N/2. \quad (3.2.1.1.17)$$

При нечетном N :

$$H(p) = (G/p + 1) \prod_{m=1}^{(N-1)/2} 1/(p^2 + a_m p + 1), \quad (3.2.1.1.16')$$

Билинейное преобразование

Для перевода передаточной функции фильтра в Z -область производится билинейное преобразование, для чего в выражение (3.2.1.1.16) подставляется параметр p :

$$p = \gamma(1-z)/(1+z). \quad (3.2.1.1.18)$$

С учетом автоматического возврата к нормальной (недеформированной) шкале частот в главном частотном диапазоне Z -преобразования значение коэффициента γ .

$$\gamma = 2/(\Delta t \cdot \omega_{dc}). \quad (3.2.1.1.19)$$

После перехода в Z -область и приведения уравнения передаточной функции в типовую форму, для четного N получаем передаточную функцию из $M=N/2$ биквадратных блоков:

$$H(z) = G \prod_{m=1}^M G_m (1+z)^2 / (1 - b_m z + c_m z^2). \quad (3.2.1.1.20)$$

$$G_m = 1/(\gamma^2 + a_m \gamma + 1). \quad (3.2.1.1.21)$$

$$b_m = 2 \cdot G_m (\gamma^2 - 1). \quad (3.2.1.1.22)$$

$$c_m = G_m (\gamma^2 - a_m \gamma + 1). \quad (3.2.1.1.23)$$

Сами полюсы на Z -плоскости получаются из полюсов на P -плоскости с помощью пре-

образования, обратному (3.2.1.1.18)

$$z = \frac{\gamma - p}{\gamma + p}, \quad (3.2.1.1.18')$$

при этом в числителе на Z -плоскости появляется N одинаковых нулей на ($z_n = -1$).

При любом нечетном N добавляется один постоянный линейный блок первого порядка, который можно считать нулевым блоком фильтра ($m=0$):

$$H(z) = G \frac{(1+z)/(\gamma+1)}{1-z(\gamma-1)/(\gamma+1)} \prod_{m=1}^{(N-1)/2} G_m (1+z)^2 / (1-b_m z + c_m z^2), \quad (3.2.1.1.24)$$

при этом, естественно, в выражении (3.2.1.1.24) используются значения коэффициентов G_m , b_m и c_m , вычисленные по (3.2.1.1.21-3.2.1.1.23) для данного нечетного значения N .

При $z = \exp(-j\omega)$ главный диапазон функций $H(z)$ от $-\pi$ до π . Для получения передаточной функции в шкале физических частот достаточно вместо z в выражения (3.2.1.1.20, 3.2.1.1.24) подставить значение $z = \exp(-j\omega\Delta t)$, где Δt – физический интервал дискретизации данных, и проверить соответствие расчетной передаточной функции заданным условиям.

Особенностью ФНЧ на Z -плоскости является то, что в его числителе имеется только вещественные корни-нули, равные $(-1 + j0)$. Если порядок фильтра нечетный, то один нуль с таким значением будет непарным, что оказывает влияние на передаточную функцию – она будет иметь сдвиг на величину π от аналогичной функции, заданной на S -плоскости. Для того чтобы избежать этого, в передаточной функции при нечетном порядке фильтра следует использовать отрицательное значение G .

Фильтрация во временной области

Во временной области фильтрация выполняется последовательной сверткой входного сигнала с операторами ячеек фильтра:

$$y_k = x_k * \{h_0(i)\} * h_1(i) * \dots * h_M(i), \quad i = 0, 1, 2.$$

Уравнение рекурсивной фильтрации для m -го оператора фильтра:

$$y_k = G_m (x_k + 2x_{k-1} + x_{k-2}) + b_m y_{k-1} - c_m y_{k-2}. \quad (3.2.1.1.25)$$

Уравнение рекурсивной фильтрации для дополнительного $h_0(i)$ линейного оператора фильтра при нечетном N :

$$y_0 = (x_k + x_{k-1})/(\gamma+1) + y_{k-1} \cdot (\gamma-1)/(\gamma+1). \quad (3.2.1.1.26)$$

Значение множителя G в общем случае находится нормировкой к 1 коэффициента передачи фильтра при $\omega = 0$. Для ФНЧ и ФВЧ при использовании вышеприведенных формул значение G равно 1.

Пример расчета

Рассмотрим последовательность расчета конкретного фильтра низких частот с применением приводимых формул. Для расчета примем следующие исходные параметры фильтра:

- Шаг дискретизации данных $\Delta t = 0.0005$ сек.
- Частота Найквиста $f_N = 1/2\Delta t = 1000$ Гц, $\omega_N = 6.283 \cdot 10^3$ рад.
- Граничная частота полосы пропускания: $f_p = 300$ Гц, $\omega_p = 1.885 \cdot 10^3$ рад.
- Граничная частота полосы подавления: $f_s = 500$ Гц, $\omega_s = 3.142 \cdot 10^3$ рад.
- Коэффициенты неравномерности: $A_p = A_s = 0.1$.

Расчет дополнительных параметров:

1. Значение δ по формуле (3.2.1.1.3) или по ее эквиваленту

$$\delta = A_p \sqrt{2/A_p - 1} / (1 - A_p): \quad \delta = 0.484.$$

2. Деформированные частоты по формуле (3.2.1.1.4):

$$\omega_{dp} = 2.038 \cdot 10^3 \text{ рад.}$$

$$\omega_{ds} = 4 \cdot 10^3 \text{ рад.}$$

3. Порядок фильтра по формуле (3.2.1.1.6): $N = 4.483$.

Для пояснения дальнейшего порядка расчетов при четном и нечетном порядке фильтра, принимаем $N1=4, N2=5$.

4. Частота среза фильтра по формуле (3.2.1.1.7):

$$\omega_{dc}(N1) = 2.443 \cdot 10^3 \text{ рад (389 Гц)},$$

$$\omega_{dc}(N2) = 2.356 \cdot 10^3 \text{ рад (375 Гц)}.$$

Частота среза фильтра на недеформированной шкале частот по формуле (3.2.1.1.1')

$$\omega_c(N1) = 2.193 \cdot 10^3 \text{ рад (349 Гц)},$$

$$\omega_c(N2) = 2.129 \cdot 10^3 \text{ рад (339 Гц)}.$$

5. По формуле $H(w) = \sqrt{1/(1+w^{2N})}$, $w = \omega/\omega_{dc}$, для контроля строим графики передаточных функций (рис. 3.2.1.1.2).

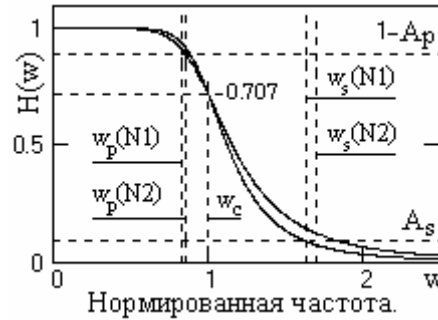


Рис. 3.2.1.1.2

6. Вычисляем значения полюсов фильтра по формуле (3.2.1.1.10). Значения полюсов и их расположение на P -плоскости приведены на рис. 3.2.1.1.3. Положение первого полюса отмечено. Нумерация полюсов идет против часовой стрелки.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$p_n, N=4$	-0.383 +0.924j	-0.924 +0.383j	-0.924 -0.383j	-0.383 -0.924j	0.383 -0.924j	0.924 -0.383j	0.924 +0.383j	0.383 +0.924j		
$p_n, N=5$	-0.309 +0.951j	-0.809 +0.588j	-1	-0.809 -0.588j	-0.309 -0.951j	0.309 -0.951j	0.809 -0.588j	1	0.809 +0.588j	0.309 +0.951j

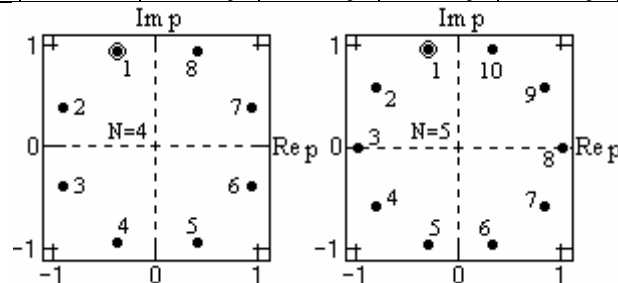


Рис. 3.2.1.1.3. Положение полюсов на P -плоскости

Соответствующие значения полюсов фильтра на S -плоскости будут больше представленных выше в ω_c раз.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$s_n, N=4$	-840 +2026j	-2026 +840j	-2026 -840j	-840 -2026j	840 -2026j	2026 -840j	2026 +840j	840 +2026j		
$s_n, N=5$	-658 +2025j	-1722 +1252j	-2129	-1722 -1252j	-658 -2025j	658 -2025j	1722 -1252j	2129	1722 +1252j	658 +2025j

7. Вычисляем значения коэффициентов a_m по формуле (3.2.1.1.17):

- $N=4$: $a_1 = 0.765$, $a_2 = 1.848$.

- $N=5$: $a_1 = 0.618$, $a_2 = 1.618$.

8. Вычисляем значения коэффициентов G_m, b_m и c_m :

- $N=4$: $\gamma = 1.637$, $G_1 = 0.203$, $G_2 = 0.149$, $b_1 = 0.681$, $b_2 = 0.501$, $c_1 = 0.492$, $c_2 = 0.098$.

- $N=5$: $\gamma = 1.698$, $G_1 = 0.203$, $G_2 = 0.151$, $b_1 = 0.763$, $b_2 = 0.568$, $c_1 = 0.574$, $c_2 = 0.171$.

9. Подставляем вычисленные коэффициенты в выражения (3.2.1.1.20, 3.2.1.1.24) и вычисляем значения передаточных функций при $z = \exp(-j\omega\Delta t)$. Графики полученных функций

приведены на рис. 3.2.1.1.4а. На рис. 3.2.1.1.4б приведена фазочастотная характеристика фильтра (сплошная кривая) и групповое время задержки (пунктир) при $N=4$. Нелинейность ГВЗ в полосе пропускания, в принципе, не так велика, но начинает расти при увеличении порядка фильтра.

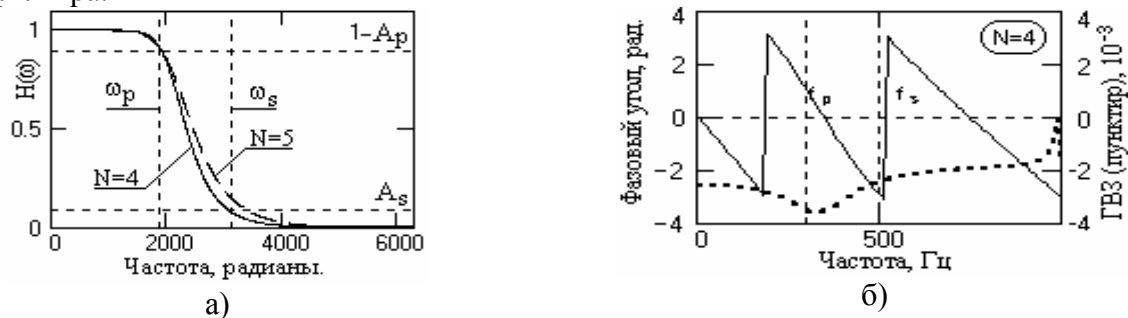


Рис. 3.2.1.1.4

10. Каждый оператор фильтра имеет определенную передаточную функцию, что можно видеть на рис. 3.2.1.1.5. Порядок последовательной свертки сигнала с операторами фильтра значения не имеет.

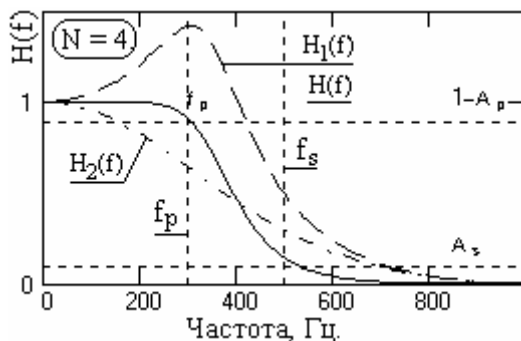


Рис. 3.2.1.1.5

11. Для оценки длительности импульсной реакции фильтра подаем на вход фильтра импульс Кронекера на отсчете $k = 3$, и начинаем фильтрацию со второго отсчета (что обеспечивает начальные условия фильтрации на точках $k=0$ и $k=1$). Сигналы на выходе первой и второй секции фильтра приведены на рис. 3.2.1.1.6.

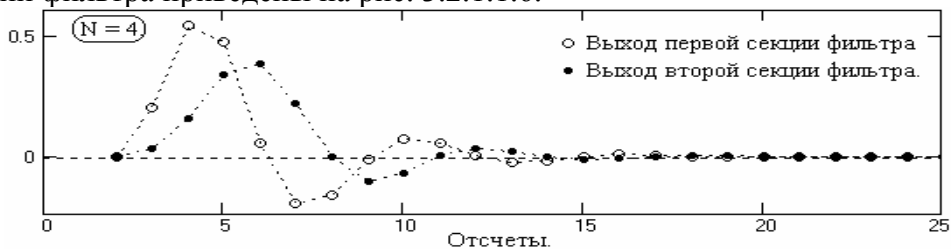


Рис. 3.2.1.1.6

Каждая секция фильтра дает определенный сдвиг фазы сигнала, но их значение для секций не является одинаковым и устранение сдвига фазы сверткой сигнала с последовательным изменением направления свертки по секциям результата, как правило, не дает.

12. Коэффициент усиления дисперсии шумов (сумма квадратов значений импульсного отклика) равен 0.341 при $N=5$, и 0.278 при $N=4$.

3.2.1.2. Фильтр верхних частот

Синтез фильтров методом частотного преобразования

Высокочастотные и полосовые фильтры конструируются путем частотной трансформации передаточных функций фильтров низких частот. Если обозначить аргумент передаточных функций ФНЧ через $p=jW$, а функций ФВЧ и ПФ через $p'=jw$, то всегда можно найти такую функцию частотного преобразования $p=F(p')$, которая превращает один тип фильтров в другой. Для преобразования ФНЧ \rightarrow ФВЧ функция частотного преобразования имеет вид:

$$p = 1/p', \quad (3.2.1.2.1)$$

В этом нетрудно убедиться сравнением двух видов преобразования. Как известно, передаточная функция ФВЧ может быть получена из ФНЧ разностью между широкополосным фильтром ($H(\omega)=1$) и ФНЧ. Применяя этот метод для функции Баттерворта, получаем:

$$|H(w)|^2 = 1 - |H(W)|^2 = 1 - 1/(1+W^{2N}) = W^{2N}/(1+W^{2N}). \quad (3.2.1.2.2)$$

С другой стороны, при $W = p/j$: $|H(p)|^2 = 1/(1-p^{2N})$. Выполняя подстановку (3.2.1.2.1) в это выражение, получаем:

$$|H(p')|^2 = p'^{2N}/(p'^{2N}-1).$$

Возвратимся из последнего выражения к аргументу w с учетом принятого равенства $p' = jw$:

$$|H(p')|^2 = (jw)^{2N}/((jw)^{2N}-1) = (w)^{2N}/(1+(w)^{2N}),$$

что полностью повторяет (3.2.1.2.2) при $w=W$.

Подставляя новый преобразованный аргумент $p=1/p'$ (3.2.1.2.1) непосредственно в выражение $H(p)$ (3.2.1.1.16) для четного значения N , получаем выражение ФВЧ в P' -плоскости:

$$H(p') = G \prod_{m=1}^{N/2} p'^2/(p'^2 + a_m p' + 1). \quad (3.2.1.2.3)$$

Для нечетного N :

$$H(p') = [G \cdot p'/(p'+1)] \prod_{m=1}^{N/2} p'^2/(p'^2 + a_m p' + 1). \quad (3.2.1.2.4)$$

После билинейного Z -преобразования выражения с подстановкой $p' = \gamma(1-z)/(1+z)$, для четного и нечетного значений N соответственно:

$$H(z) = G \prod_{m=1}^{N/2} \gamma^2 \cdot G_m \cdot (1-z)^2 / (1 - b_m z + c_m z^2). \quad (3.2.1.2.5)$$

$$H(z) = G \frac{\gamma(1-z)/(\gamma+1)}{1-z(\gamma-1)/(\gamma+1)} \prod_{m=1}^{N/2} \gamma^2 \cdot G_m \cdot (1-z)^2 / (1 - b_m z + c_m z^2). \quad (3.2.1.2.6)$$

$$G_m = 1/(\gamma^2 + a_m \gamma + 1). \quad (3.2.1.2.7)$$

$$b_m = 2 \cdot G_m (\gamma^2 - 1).$$

$$c_m = G_m (\gamma^2 - a_m \gamma + 1).$$

Значения корней-полюсов на P -плоскости будут равны, согласно (3.2.1.2.1), обратным значениям уравнений (3.2.1.1.10). Их также можно преобразовать к реальным частотам S -плоскости посредством умножения на частоту среза. Появившийся в числителе (3.2.1.2.3) и (3.2.1.2.4) член p' свидетельствует о наличии в передаточной функции на P - и S -плоскости N нулей, каждый из которых равен 0.

На Z -плоскость корни трансформируются согласно (3.2.1.1.18'), при этом все нули, как можно видеть из (3.2.1.2.5), становятся равными 1.

Значения коэффициентов G_m , b_m , c_m остаются без изменения (сравнить с (3.2.1.1.21-3.2.1.1.23)). При задании частотных параметров ФВЧ в том же виде, что и для ФНЧ, формула расчетов N и ω_{dc} получается аналогично ФНЧ, при этом в знаменателе выражения (3.2.1.1.6) отношение ω_{dp}/ω_{ds} заменяется на ω_{ds}/ω_{dp} :

$$N = \ln [\delta \sqrt{1/A_s^2 - 1}] / \ln(\omega_{ds}/\omega_{dp}), \quad (3.2.1.2.8)$$

а в (3.2.1.1.7) деление членов правой части меняется на умножение:

$$\omega_{dc} = \omega_{dp} \cdot \delta^{1/N}. \quad (3.2.1.2.9)$$

Уравнение рекурсивной фильтрации для m -го оператора фильтра:

$$y_k = \gamma^2 \cdot G_m (x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}) + b_m y_{k-1} - c_m y_{k-2}. \quad (3.2.1.2.10)$$

Уравнение рекурсивной фильтрации для дополнительного $h_0(i)$ линейного оператора фильтра при нечетном N :

$$y_0 = \gamma(x_k - x_{k-1})/(\gamma+1) + y_{k-1}(\gamma-1)/(\gamma+1). \quad (3.2.1.2.11)$$

Пример расчета фильтра

Исходные параметры фильтра:

- Шаг дискретизации данных $\Delta t = 0.0005$ сек.
- Частота Найквиста $f_N = 1/2\Delta t = 1000$ Гц, $\omega_N = 6.283 \cdot 10^3$ рад.
- Граничная частота полосы пропускания: $f_p = 700$ Гц, $\omega_p = 4.398 \cdot 10^3$ рад.
- Граничная частота полосы подавления: $f_s = 500$ Гц, $\omega_s = 3.142 \cdot 10^3$ рад.
- Коэффициенты неравномерности: $A_p = A_s = 0.1$.

Расчет дополнительных параметров:

1. $\delta = A_p \sqrt{2 / (A_p - 1)} / (1 - A_p)$: $\delta = 0.484$.

2. Деформированные частоты по формуле (3.2.1.1.4):

$$\omega_{dp} = 7.85 \cdot 10^3 \text{ рад.} \quad \omega_{ds} = 4 \cdot 10^3 \text{ рад.}$$

3. Порядок фильтра по формуле (3.2.1.2.8): $N = 4.483$.

Для расчетов принимаем $N=4$.

4. Частота среза фильтра по формуле (3.2.1.2.9):

$$\omega_{dc} = 6.549 \cdot 10^3 \text{ рад (1042 Гц)},$$

5. Строим график функции $H(w) = \sqrt{w^{2N} / (1 + w^{2N})}$, $w = \omega / \omega_{dc}$, (рис.3.2.1.2.1).



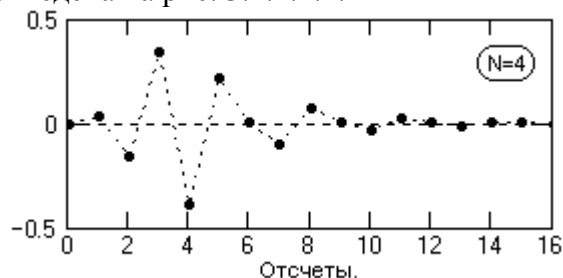
Рис. 3.2.1.2.1

6. Полюсы s_n фильтра полностью повторяют полюсы ФНЧ (рис. 3.2.1.1.3), а, соответственно, повторяются и значения коэффициентов a_m .

7. $\gamma = 0.611$, $G_1 = 0.543$, $G_2 = 0.4$, $b_1 = -0.681$, $b_2 = -0.501$, $c_1 = 0.492$, $c_2 = 0.098$.

При сравнении выражений (3.2.1.1.20) и (3.2.1.2.5), а также коэффициентов b_m , c_m и коэффициентов в числителе передаточных функций ФВЧ с соответствующими коэффициентами ФНЧ предыдущего примера можно заметить, что в данном фильтре относительно ФНЧ произошла только смена знаков коэффициентов при нечетных степенях z . Это объясняется тем, что заданные в данном примере параметры ФВЧ по частоте соответствуют частотному реверсу ФНЧ: $\omega' = \pi - \omega$, что приводит к частотному реверсу передаточной функции низкочастотного фильтра и превращению его в высокочастотный фильтр. Этот способ обращения ФНЧ также может использоваться для расчетов ФВЧ.

8. Импульсная реакция фильтра, вычисленная по (3.2.1.2.10) при подаче на вход фильтра импульса Кронекера приведена на рис. 3.2.1.2.2.



3.2.1.3. Полосовой фильтр

Как известно, полосовой фильтр можно получить непосредственной комбинацией низкочастотного и высокочастотного фильтра при перекрытии полосы пропускания фильтров. Аналогичный эффект достигается и частотным преобразованием ФНЧ, которое в этом случае имеет вид:

$$p' = p + 1/p. \quad (3.2.1.3.1)$$

Подставив в (3.2.1.3.1) значения $p = jW$ и $p' = jw$, получим:

$$\begin{aligned} W &= [w^2 - 1]/w, \\ w^2 - Ww - 1 &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.1.3.2)$$

Корни уравнения (3.2.1.3.2):

$$(w)_{1,2} = W/2 \pm \sqrt{(W/2)^2 + 1}. \quad (3.2.1.3.3)$$

Расщепление спектра

При $W=0$ имеем $w = \pm 1$, т.е. центр полосы пропускания ФНЧ (от $-W_c$ до $+W_c$) расщепляется на два (как и положено, для полосовых фильтров) и смещается в точки $w = \pm 1$. Подставив в (3.2.1.3.3) граничную частоту $W_c=1$ нормированного ФНЧ, определяем граничные частоты нормированного полосового фильтра в виде пары сопряженных частот:

$$w_1 = \pm 0.618, \quad w_2 = \pm 1.618$$

Сущность произведенного преобразования наглядно видна на рис. 3.2.1.3.1. Ширина полосы пропускания нормированного ПФ равна 1.

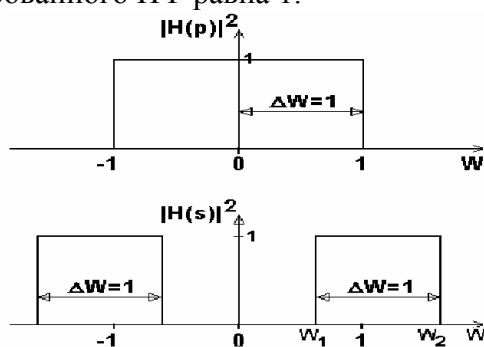


Рис. 3.2.1.3.1. Расщепление полосы

Полученное преобразование можно распространить на полосовой фильтр с ненормированными частотами ω_n и ω_b .

Введем понятие геометрической средней частоты фильтра ω_o :

$$\omega_o = \sqrt{\omega_n \omega_b}. \quad (3.2.1.3.4)$$

Ширина полосы пропускания ПФ связана (см. рис.3.2.1.3.1) с граничной частотой ФНЧ соотношением:

$$\Delta\omega = \omega_b - \omega_n = \omega_c = \omega_n.$$

В долях средней геометрической частоты:

$$W_n = (\omega_b - \omega_n)/\omega_o = W_c. \quad (3.2.1.3.5)$$

Заменяя в (3.2.1.3.4-3.2.1.3.5) значение ω_b на произвольную частоту ω и подставляя в (3.2.1.3.5) значение $\omega_n = \omega_o^2/\omega$ из (3.2.1.3.4), получаем произвольную частоту W :

$$W = (\omega - \omega_n)/\omega_o = \omega/\omega_o - \omega_o/\omega. \quad (3.2.1.3.6)$$

Отсюда, в выражении (3.2.1.1.1) вместо нормированной частоты $W = \omega/\omega_c$ можно применить функцию частоты полосового фильтра $w(\omega)$:

$$w(\omega) = (\omega^2 - \omega_o^2)/[\omega(\omega_g - \omega_n)],$$

или, подставляя (3.2.1.3.4) вместо ω_o :

$$w(\omega) = (\omega^2 - \omega_n \omega_g)/[\omega(\omega_g - \omega_n)]. \quad (3.2.1.3.7)$$

Тем самым передаточная функция ФНЧ выражается в единицах, которые позволяют после применения преобразования (3.2.1.3.1) использовать для задания необходимые граничные частоты ω_n и ω_g полосового фильтра.

Полосовой фильтр на P- и S-плоскостях

С учетом деформации частот, принимаем $p = j\omega = j(\omega^2 - \omega_{dn}\omega_{dg})/[\omega(\omega_{dg} - \omega_{dn})]$, $s = j\omega$ и заменяем $\omega = s/j$ в выражении p :

$$\begin{aligned} p &= (s^2 + \omega_{dn}\omega_{dg})/[s(\omega_{dg} - \omega_{dn})], \\ s^2 - p(\omega_{dg} - \omega_{dn})s + \omega_{dn}\omega_{dg} &= 0. \end{aligned} \quad (3.2.1.3.8)$$

Корни уравнения (3.2.1.3.8) определяют местоположение полюсов ПФ:

$$s = s^* = p(\omega_{dg} - \omega_{dn})/2 \pm \sqrt{[p(\omega_{dg} - \omega_{dn})/2]^2 - \omega_{dn}\omega_{dg}}. \quad (3.2.1.3.9)$$

Уравнение (3.2.1.3.9) показывает расщепление каждого P -полюса, определяемых выражением (3.2.1.1.14), на два комплексно сопряженных полюса S -плоскости, произведение которых будет давать вещественные биквадратные блоки в S -плоскости. При этом следует учесть то обстоятельство, что устойчивому рекурсивному фильтру на Z -плоскости должны соответствовать полюса только одной (левой) половины P - или S -плоскости.

Передаточная функция

При применении преобразования (3.2.1.3.1) к передаточной функции в полиномиальной форме (3.2.1.1.11), получаем:

$$H(p) = G \prod_{m=1}^N 1/(p-p_m) \Leftrightarrow G \prod_{m=1}^N s/(s^2 - p_m s + 1) = H(s), \quad (3.2.1.3.10)$$

Выражение (3.2.1.3.10) не требует нахождения полюсов, так как они уже известны и определяются выражением (3.2.1.3.9). С учетом этого функция $H(s)$ может быть записана с объединением в биквадратные блоки комплексно сопряженных полюсов с вещественными коэффициентами:

$$H(s) = G \prod_{m=1}^N s/[(s-s_m)(s-s_m^*)] = G \prod_{m=1}^N s/(s^2 + a_m s + g_m), \quad (3.2.1.3.11)$$

где значения a_m и g_m могут быть определены непосредственно по полюсам (3.2.1.3.9):

$$\begin{aligned} a_m &= -2 s_m \cdot \text{Re}, \\ g_m &= s_m \cdot \text{Re}^2 + s_m \cdot \text{Im}^2 = |s_m|^2. \end{aligned} \quad (3.2.1.3.12)$$

По приведенному примеру можно заметить, что при использовании ненормированных частот ω , достаточно существенных по своей величине, значения S -полюсов и, соответственно, величины коэффициентов a_m и g_m имеют большие порядки, что нежелательно для дальнейших расчетов и может приводить к появлению погрешностей при ограничении разрядности. Для исключения этого фактора значения полюсов s_n рекомендуется пронормировать на среднюю геометрическую частоту:

$$s_n = s_n/\omega_o.$$

Коэффициент γ билинейного преобразования для ненормированных значений ω и по-

люсов s_n имеет классическую форму: $\gamma = 2/\Delta t$. Соответственно, для нормированных значений: $\gamma = 2/(\Delta t \cdot \omega_0)$. После билинейного Z -преобразования выражения (3.2.1.3.11), получаем:

$$H(z) = G \prod_{m=1}^N G_m (1-z^2)/(1-b_m z + c_m z^2). \quad (3.2.1.3.13)$$

$$G_m = 1/(\gamma + a_m + g_m \gamma^{-1}). \quad (3.2.1.3.14)$$

$$b_m = 2G_m(\gamma - g_m \gamma^{-1}). \quad (3.2.1.3.15)$$

$$c_m = G_m(\gamma - a_m + g_m \gamma^{-1}). \quad (3.2.1.3.16)$$

Разные значения множителей G_m в секциях фильтра обычно опускаются и нормировкой $H(z)$ к 1 на геометрической средней частоте фильтра определяют общий множитель G , что ускоряет вычисления:

$$G = 1/H(\exp(-j\Delta t \omega_0)). \quad (3.2.1.3.17)$$

При очень малой величине порядка значения G для исключения и накопления аппаратных ошибок вычислений можно применять и другой метод: устанавливать для всех секций постоянное значение $G_m = const$, такое, при котором $G = 1$.

Пример расчета фильтра

Исходные параметры фильтра:

- Шаг дискретизации данных $\Delta t = 0.0005$ сек.
- Частота Найквиста $f_N = 1/2\Delta t = 1000$ Гц, $\omega_N = 6.283 \cdot 10^3$ рад.
- Нижняя граничная частота полосы пропускания:
 $f_n = 340$ Гц, $\omega_n = 2.136 \cdot 10^3$ рад.
- Верхняя граничная частота полосы пропускания:
 $f_s = 470$ Гц, $\omega_s = 2.953 \cdot 10^3$ рад.
- Крутизна срезов в децибелах на октаву: $K_p = 45$.

Расчет параметров:

1. Порядок фильтра по формуле (3.2.1.1.6):

$$N = K_p/6 = 45/6 = 7.5.$$

Для расчетов принимаем $N=8$.

2. Строим график функции $H(\omega) = \sqrt{1/(1+w(\omega)^{2N})}$ с использованием выражения (3.2.1.3.7). Передаточная характеристика фильтра приведена на рис. 3.2.1.3.2.



Рис. 3.2.1.3.2

3. Деформированные частоты по формуле (3.2.1.1.4):

$$\omega_{dn} = 2.366 \cdot 10^3 \text{ рад.} \quad \omega_{ds} = 3.64 \cdot 10^3 \text{ рад.} \quad \omega_{do} = 2.934 \cdot 10^3.$$

4. Полюса фильтра на единичной окружности в p -плоскости:

$$p_n = j \cdot \exp[j \cdot \pi(2n-1)/2N], \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Положение полюсов приведено на рис. 3.2.1.3.3.

5. Полюса в левой половине S -плоскости, $n = 1, 2, \dots, 2N$ (приведены на рис. 3.2.1.3.4):

$$s_n = p_{\text{int}\left(\frac{n+1}{2}\right)} \frac{\omega_{ds} - \omega_{dn}}{2} + (-1)^{n-1} \sqrt{\left[p_{\text{int}\left(\frac{n+1}{2}\right)} \frac{\omega_{ds} - \omega_{dn}}{2} \right]^2 - \omega_{ds} \omega_{dn}}$$

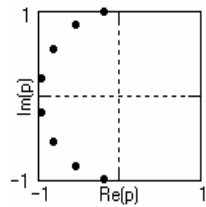


Рис. 3.2.1.3.3

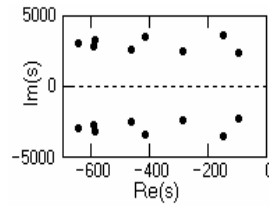


Рис. 3.2.1.3.4

6. По полученным значениям полюсов вычисляем коэффициенты a_m и g_m (3.2.1.3.12), $m = n$.

$$a_m = 196.8, 300.4, 581.2, 834.5, 930.5, 1188, 1196, 1304.$$

$$g_m = 5.64 \cdot 10^6, 1.314 \cdot 10^7, 5.997 \cdot 10^6, 1.236 \cdot 10^7, 6.742 \cdot 10^6, 1.1 \cdot 10^7, 7.895 \cdot 10^6, 9.39 \cdot 10^6.$$

6'. Значения коэффициентов a_m и g_m (3.2.1.3.12), вычисленные по нормированным значениям s_n (используются в дальнейших расчетах)

$$a_m = 0.067, 0.102, 0.198, 0.284, 0.317, 0.405, 0.407, 0.444.$$

$$g_m = 0.655, 1.527, 0.697, 1.436, 0.783, 1.277, 0.917, 1.091.$$

7. Значения коэффициента γ : $\gamma = 1.363$.

8. Значения коэффициентов G_m по (3.2.1.3.14):

$$G_m = 0.523, 0.387, 0.483, 0.37, 0.444, 0.37, 0.409, 0.384.$$

9. Значения коэффициентов b_m по (3.2.1.3.15):

$$b_m = 0.924, 0.188, 0.823, 0.23, 0.7, 0.315, 0.565, 0.432.$$

10. Значения коэффициентов c_m по (3.2.1.3.16):

$$c_m = 0.93, 0.921, 0.809, 0.789, 0.719, 0.701, 0.666, 0.659.$$

11. Общий нормировочный множитель G : $G = 1.264 \cdot 10^{-3}$.

12. Заключительная передаточная функция:

$$H(\omega) = G \prod_{m=1}^N \frac{G_m [1 - (\exp(-j\omega\Delta t))^2]}{1 - b_m \exp(-j\omega\Delta t) + c_m (\exp(-j\omega\Delta t))^2}$$

При построении графика данной функции можно убедиться, что она полностью соответствует рисунку 3.2.1.3.2.

13. Уравнение первой секции фильтра:

$$y_{1,k} = G_1(x_k - x_{k-2}) + b_1 y_{k-1} - c_1 y_{k-2}.$$

Уравнение для последующих секций

$$y_{m,k} = G_m(y_{m-1,k} - y_{m-1,k-2}) + b_m y_{m,k-1} - c_m y_{m,k-2}.$$

3.2.1.4. Полосовой заградительный фильтр

Заградительный фильтр на S -плоскости

Если применить обратное частотное преобразование

$$p = s(\omega_g - \omega_n) / (s^2 + \omega_g \omega_n),$$

то в результате будет получен полосовой заградительный фильтр (ПЗФ). Запишем уравнение (3.2.1.3.8) в виде:

$$p s^2 - s(\omega_g - \omega_n) + p \omega_g \omega_n = 0. \quad (3.2.1.4.1)$$

Корни уравнения (3.2.1.4.1) определяют местоположение полюсов ПЗФ:

$$s = s^* = \frac{\omega_g - \omega_n}{2p} \pm \sqrt{\left(\frac{\omega_g - \omega_n}{2p}\right)^2 - \omega_n \omega_g}, \quad (3.2.1.4.2)$$

но они полностью идентичны корням (3.2.1.3.9)

Передаточная функция

Вместо преобразования (3.2.1.3.1) $p = s + 1/s$ воспользуемся обратным $p = 1/(s + 1/s)$, что эквивалентно $p = s/(s^2 + 1)$.

При применении этого преобразования к передаточной функции в полиномиальной форме (3.2.1.1.11), получаем:

$$H(p) = G \prod_{m=1}^N 1/(p-p_m) \Leftrightarrow G \prod_{m=1}^N (1+s^2)/(-p_m s^2 + s - p_m) = H(s), \quad (3.2.1.4.3)$$

Выражение (3.2.1.4.3) не требует нахождения полюсов, т.к. они уже известны и определяются выражением (3.2.1.4.2). С учетом этого функция $H(s)$ может быть записана с объединением в биквадратные блоки комплексно сопряженных полюсов с вещественными коэффициентами:

$$H(s) = G \prod_{m=1}^N (1+s^2)/[(s-s_m)(s-s_m^*)] = G \prod_{m=1}^N (1+s^2)/(s^2+a_m s + c_m), \quad (3.2.1.4.4)$$

где значения a_m и c_m могут быть определены непосредственно по полюсам (3.2.1.4.2):

$$\begin{aligned} a_m &= -2 s_m \cdot \text{Re}, \\ c_m &= s_m \cdot \text{Re}^2 + s_m \cdot \text{Im}^2 = |s_m|^2. \end{aligned} \quad (3.2.1.4.5)$$

Для снижения фактора появления погрешностей при ограничении разрядности значения полюсов s_n рекомендуется пронормировать на среднюю геометрическую частоту:

$$s_n = s_n / \omega_0.$$

Коэффициент γ билинейного преобразования для ненормированных значений ω и полюсов s_n имеет классическую форму: $\gamma = 2/\Delta t$. Соответственно, для нормированных значений: $\gamma = 2/(\Delta t \cdot \omega_0)$. Новое выражение (3.2.1.4.4) отличается от (3.2.1.3.11) множителем $(s^2+1)/s$, поэтому после билинейного Z -преобразования выражения (3.2.1.4.4), получаем выражение, которое отличается от (3.2.1.3.13), построенного для полосового фильтра, лишь числителем:

$$H(z) = G \prod_{m=1}^N (g_m + d_m z + g_m z^2)/(1 - b_m z + c_m z^2). \quad (3.2.1.4.6)$$

$$\begin{aligned} g_m &= \gamma + \gamma^{-1}, \\ d_m &= 2(\gamma^{-1} - \gamma). \end{aligned}$$

Нули, задаваемые числителем, есть не что иное, как точки на единичной окружности, соответствующие геометрической средней частоте:

$$z_n = \cos(\omega_0 \Delta t) \pm j \sin(\omega_0 \Delta t).$$

3.2.2. Фильтры Чебышева

Фильтры Чебышева в отличие от фильтров Баттерворта при одном и том же порядке имеют более крутой спад. Платой за это становятся пульсации АЧХ в полосе пропускания. Для расчета фильтров Чебышева достаточно представлений, уже описанных в главе 3.1. Фильтры Баттерворта. Основное отличие чебышевских фильтров наглядно можно описать на комплексной P -плоскости, где изначально находятся полюсы передаточной функции для ФНЧ, ФВЧ, ПФ и ПЗФ. Полюсы фильтра Баттерворта на P -плоскости располагаются на единичной окружности, тем самым обеспечивая плавное изменение АЧХ. Если окружность, на которой они лежат сжать таким образом, чтобы она превратилась в эллипс, то фильтр станет чебышевским. Степень сжатия эллипса определяет величину флуктуаций в полосе пропускания.

Если полюс на окружности имеет координаты σ и ω ($\sigma + j\omega$), то их трансформация в полюс фильтра Чебышева с координатами σ' и ω' описывается следующими уравнениями ([Smith, 1999](#)):

$$\begin{aligned} \sigma' &= \sigma \sinh(v)/k \\ \omega' &= \omega \cosh(v)/k \end{aligned} \tag{3.2.2.1}$$

где

$$\begin{aligned} v &= \frac{\sinh^{-1}(1/\varepsilon)}{Np} \\ k &= \cosh(\cosh^{-1}(1/\varepsilon)/Np). \\ \varepsilon &= \left[\left(\frac{1}{1-A_p} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \end{aligned}$$

Параметры v , k и ε не несут никакого физического смысла и используются лишь для упрощения описания данного преобразования. Величина Np представляет количество полюсов, A_p – коэффициент неравномерности, описанный ранее в [главе 3.2.1.1](#).

3.2.3. Режекторный фильтр

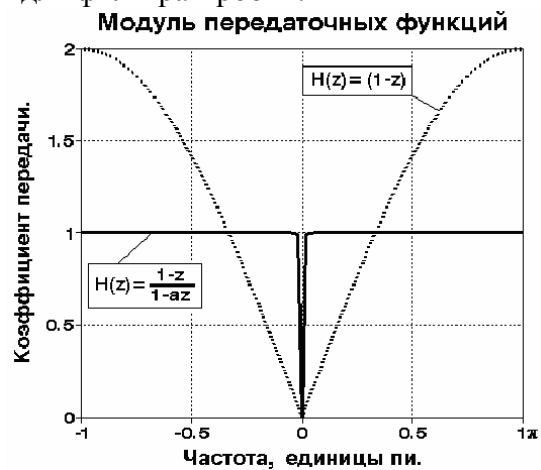
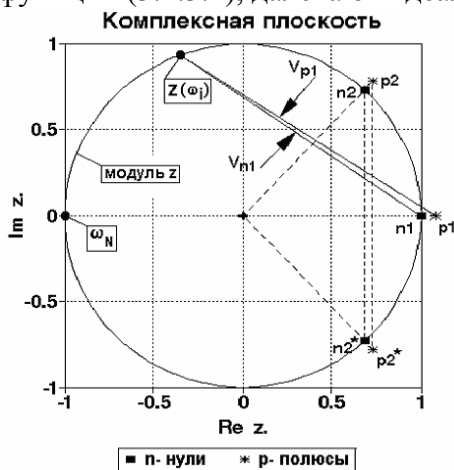
Режекторный фильтр (фильтр-пробка) подавляет определенную частоту во входном сигнале. Он может быть спроектирован непосредственно по Z -диаграмме.

Комплексная Z -плоскость

Простейший режекторный фильтр имеет один нуль на единичной окружности в Z -плоскости в точке с частотой, которую необходимо подавить. Так, например, если из входного сигнала требуется исключить постоянную составляющую (нулевая частота), то импульсная реакция фильтра имеет вид:

$$H(z) = 1 - z. \tag{3.2.3.1}$$

Ноль функции (3.2.3.1) равен $n_1=1$. Как можно видеть на рис. 3.2.3.1, коэффициент передачи сигнала $H(\omega)$ на любой частоте ω_i от 0 до $\omega_N = \pi/\Delta t$ – частоты Найквиста, определяемый выражением (3.2.3.1), будет равен длине вектора V_{n1} , проведенного из нуля функции $H(z)$ – точка n_1 на действительной оси, до соответствующей частоты ω_i – точки $z(\omega_i)$ на единичной окружности. На частоте $\omega = 0$ длина этого вектора равна нулю. Амплитудно-частотная характеристика фильтра, приведенная пунктиром на рисунке 3.2.3.2 для передаточной функции (3.2.3.1), далека от идеальной для фильтра-пробки.



Режекторный фильтр постоянной составляющей сигнала

Сконструируем простейший РЦФ, добавив к оператору (3.2.3.1) один полюс вне единичной окружности на малом расстоянии от нуля:

$$H_n(z) = G(1-z)/(1-az), \quad z_p = 1/a. \tag{3.2.3.2}$$

Допустим, что полюс помещен в точке $p_1 = 1.01$, при этом, $a=0,99$. Масштабный коэффициент G получим нормировкой $H(z)$ к 1 на частоте Найквиста. Для приведенных условий $G=0.995$. Отсюда, при $\Delta t=1$:

$$H_n(z) = 0,995(1-z)/(1-0,99z),$$

$$y(k) = 0,995[x(k) - x(k-1)] + 0,99y(k-1).$$

Отображение нуля n_1 и полюса p_1 на Z -плоскости и АЧХ фильтра для исключения постоянной составляющей приведены на рис. 3.2.3.1.

Коэффициент передачи сигнала на произвольной частоте ω_i равен отношению длин векторов $V_{n1}(z)$ и $V_{p1}(z)$ соответственно из нуля и полюса до точки $z(\omega_i)$ на единичной окружности и близок к единице для всех частот, за исключением нулевой:

$$|H_n(z)| = G V_{n1}(z)/V_{p1}(z).$$

Фазочастотная характеристика фильтра приведена на рис. 3.2.3.3 и определяется разностью фазовых углов векторов $V_{n1}(z)$ и $V_{p1}(z)$:

$$\varphi_n(\omega) = \varphi_{n1} - \varphi_{p1}.$$

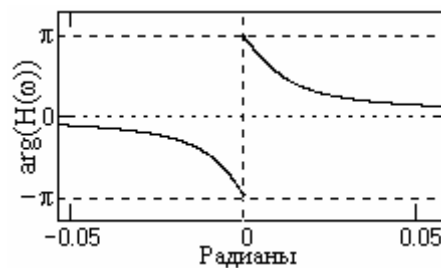


Рис. 3.2.3.3

Режекторный фильтр произвольной частоты

При проектировании на подавление любой другой частоты ω_v нули и полюсы располагаются на соответствующем радиусе Z -плоскости. Радиальный угол направления на нуль и полюс определяются выражением:

$$\varphi_v = \pm \pi \omega_v / \omega_N. \quad (3.2.3.3)$$

Наличие двух знаков в выражении (3.2.3.3) отражает тот факт, что для получения вещественной функции фильтра нули и полюсы должны быть комплексно-сопряженными парами (их произведение дает вещественную функцию), т.е.:

$$H_v(z) = G(z-z_n)(z-z_n^*) / [(z-z_p)(z-z_p^*)]. \quad (3.2.3.4)$$

Нули фильтра располагаются на единичной окружности:

$$z_n = \cos \varphi_v + j \sin \varphi_v = z_n \cdot \text{Re} + j z_n \cdot \text{Im}. \quad (3.2.3.5)$$

Полюсы – на полярном радиусе R :

$$z_p = R \cos \varphi_v + j R \sin \varphi_v = z_p \cdot \text{Re} + j z_p \cdot \text{Im}. \quad (3.2.3.6)$$

Пример положения нулей (n_2 и n_2^*) и полюсов (p_2 и p_2^*) приведен на рис. 3.2.3.1. Подставляя (3.2.3.5-3.2.3.6) в (3.2.3.4), получаем:

$$H_v(z) = \frac{G(z^2 - 2z_n \cdot \text{Re} z + 1)}{1 + (z^2 - 2z_p \cdot \text{Re} z) / R^2}, \quad (3.2.3.7)$$

$$G = [1 + (1 + 2 z_p \cdot \text{Re}) / R^2] / (2 + 2 z_n \cdot \text{Re}). \quad (3.2.3.8)$$

При приведении уравнения (3.2.3.7) в типовую форму:

$$H_v(z) = \frac{G(b_0 + b_1 z + b_2 z^2)}{1 + a_1 z + a_2 z^2}, \quad (3.2.3.7')$$

$$b_0 = 1, \quad b_1 = -2 \cdot z_n \cdot \text{Re}, \quad b_2 = 1. \quad (3.2.3.9)$$

$$a_1 = -(2 \cdot z_p \cdot \text{Re})/R^2, \quad a_2 = 1/R^2.$$

Соответственно, алгоритм вычислений во временной области:

$$y(k) = G \cdot [x(k) + b_1 \cdot x(k-1) + x(k-2)] - a_1 \cdot y(k-1) - a_2 \cdot y(k-2). \quad (3.2.3.10)$$

Пример расчета фильтра

Проведем расчет режекторного фильтра на частоту питания приборов $f_s = 50$ Гц, которая очень часто попадает в измеренные данные. Частотные характеристики такого фильтра (ось абсцисс в радианах) показаны на рис.

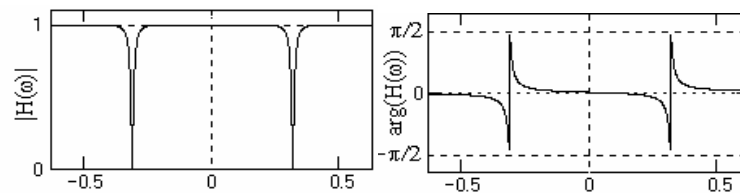


Рис. 3.2.3.4

Исходные параметры фильтра:

- Шаг дискретизации данных $\Delta t = 0.001$ сек.
- Частота Найквиста: $f_N = 1/2\Delta t = 500$ Гц.

Расчет параметров:

Радиальный угол на нули и полюса фильтра в Z -плоскости: $\varphi = \pi f_s / f_N = 0.1\pi$.

Радиус полюса фильтра примем равным $R = 1.01$. Значения нуля и полюса:

$$z_n = \cos \varphi + j \sin \varphi = 0.951 + 0.309j,$$

$$z_p = R \cdot \cos \varphi + j R \cdot \sin \varphi = 0.961 + 0.312j.$$

Значение масштабного множителя G по (3.2.1.2.8): $G = 0.99$.

Значения коэффициентов передаточной функции:

$$b_1 = -2 \cdot z_n \cdot \text{Re} = -1.902,$$

$$a_1 = -(2 \cdot z_p \cdot \text{Re})/R^2 = -1.883,$$

$$a_2 = 1/R^2 = 0.98.$$

Частотная передаточная функция фильтра при подстановке коэффициентов в уравнение (3.2.3.7') и замене $z = \exp(-j\omega)$:

$$H(\omega) = 0.99[1 - 1.902 \cdot \exp(-j\omega) + \exp(-2j\omega)] / [1 - 1.883 \cdot \exp(-j\omega) + 0.98 \cdot \exp(-2j\omega)].$$

Алгоритм фильтра:

$$y(k) = 0.99[x(k) - 1.902 x(k-1) + x(k-2)] + 1.883 y(k-1) - 0.98 y(k-2).$$

Для проверки вычисленного в примере фильтра на рис. 3.2.3.5 приведен модельный входной сигнал, состоящий из суммы двух равных по амплитуде гармоник с частотой 50 и 53 Гц, и сигнал на выходе фильтра (смещен вверх). Справа на рисунке приведены спектры входного и выходного сигналов. Спектр выходного сигнала зарегистрирован после интервала установления реакции фильтра, который хорошо заметен на начальной части графика выходного сигнала. После установления сигнал на выходе фильтра практически полностью освобожден от гармоники 50 Гц.

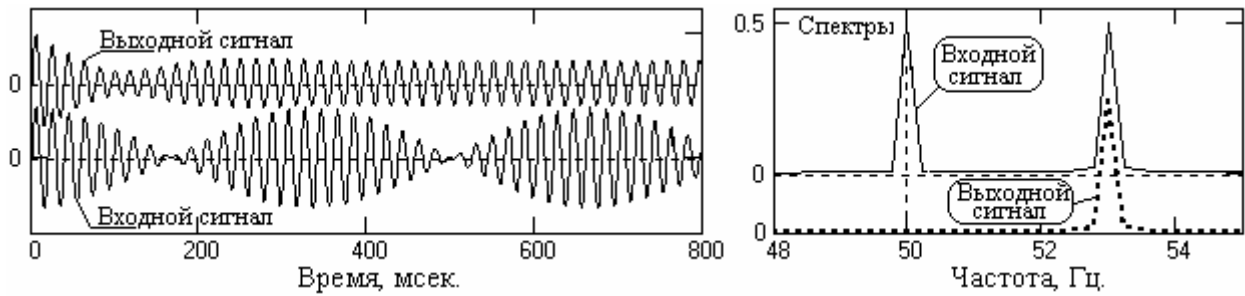


Рис. 3.2.3.5

При $R \rightarrow 1$ ширина полосы подавления фильтра становится все более узкой, но при этом увеличивается длительность импульсной реакции фильтра и, соответственно, время установления фильтра при изменении спектра входного сигнала. В первом приближении значимая часть импульсной реакции режекторных фильтров равна $(4+5)/(R-1)$. Пример импульсной реакции для фильтра, вычисленного выше, приведен на рис. 3.2.3.6.

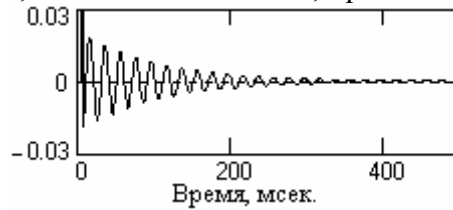


Рис. 3.2.3.6

Отклик фильтра получен при подаче на вход РЦФ импульса Кронекера. На графике не показан начальный пик отклика (отсчет на нулевой точке), амплитуда которого равна значению G .

3.2.4. Селекторный фильтр

Если в уравнении (3.2.3.4) опустить нули, то получим селекторный фильтр, выделяющий сигналы одной частоты ω_s – частоты селекции, с передаточной функцией:

$$H_s(z) = G / [(z - z_p)(z - z_p^*)] = G_1 / (1 + a_1 z + a_2 z^2). \quad (3.2.4.1)$$

Характер передаточной функции (3.2.4.1) можно представить непосредственно по Z -плоскости (рис. 3.2.3.1). При расположении полюсов фильтра за пределами единичного круга (например, в точках p_2 и p_2^*) значение коэффициента передачи фильтра на произвольной частоте ω на единичной окружности будет обратно пропорционально величине векторов из этих точек окружности на полюса фильтра. При изменении ω от нуля до $\pm\pi$ (движение по единичной окружности на Z -плоскости по или против часовой стрелки) один из векторов (на полюс противоположной полуплоскости) изменяется в достаточно небольших пределах (не превышая значения 2), в то время как второй из векторов (на полюс в своей полуплоскости) будут сначала уменьшаться, достигает минимума при расположении ω на полярном радиусе полюса (на частоте селекции ω_s), а затем снова начинает увеличиваться. Соответственно, значение $H_s(\omega)$ максимально на частоте селекции $\pm\omega_s$ и при $R \rightarrow 1$ может быть очень высоким.

При необходимости фильтр может быть пронормирован к 1 на частоте селекции определением значения G_1 по условию $H_s(\omega) = 1$ при $\omega = \omega_s$, т.е.:

$$G_1 = 1 + a_1 z(\omega_s) + a_2 z(\omega_s)^2.$$

Фильтр (3.2.4.1) в принципе не может иметь нулевого коэффициента передачи на других частотах главного диапазона. Если последнее является обязательным, то фильтр выполняется методом обращения режекторного фильтра $H_v(z)$:

$$H_s(z) = 1 - H_v(z).$$

$$H_s(z) = \frac{c_0 + c_1 z + c_2 z^2}{1 + a_1 z + a_2 z^2}, \quad (3.2.4.2)$$

где $c_0 = 1-G$, $c_1 = a_1 - Gb_1$, $c_2 = a_2 - G$.

Особенностью селекторного фильтра является то, что в его числителе имеется 2 вещественных корня-нуля, один из которых равен $(-1 + j0)$. Наличие непарного нуля с таким значением оказывает влияние на передаточную функцию в виде сдвига фаз на величину π от аналогичной функции, заданной на S -плоскости. Для того чтобы избежать этого, к передаточной функции следует добавить множитель (-1) .

Пример передаточной функции фильтра приведен на рис. 3.2.4.1.

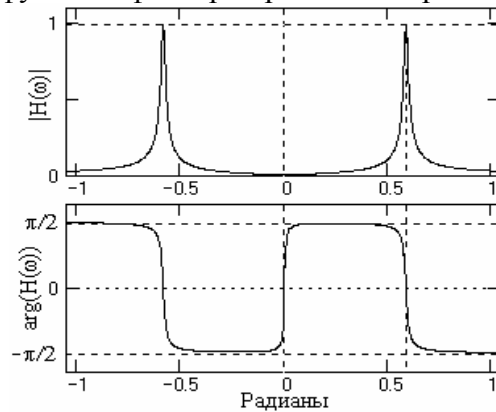


Рис. 3.2.4.1

Пример применения фильтра для выделения гармонического сигнала на уровне шумов, мощность которых больше мощности сигнала, приведен на рис. 3.2.4.2.

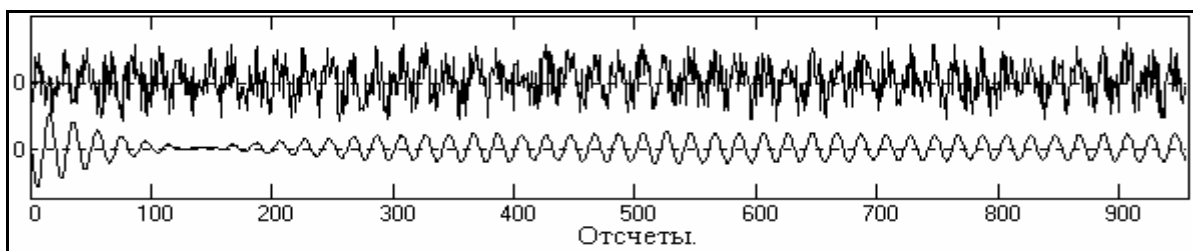


Рис. 3.2.4.2. Фильтрация сигнала селекторным РЦФ

3.2.5. Билинейное Z-преобразование

Принцип преобразования

При стандартном Z-преобразовании передаточной функции используется замена переменной вида:

$$z = \exp(-s\Delta t), \quad (3.2.5.1)$$

где Δt – шаг дискретизации данных, s – комплексная переменная, $s = \sigma + j\omega$.

Уравнение (3.2.5.1) можно записать в виде $\ln z = -s\Delta t$ и разложить $\ln z$ в ряд:

$$\ln z = -2\left[\frac{(1-z)}{(1+z)} + \frac{(1-z)^3}{3(1-z)^3} + \dots\right], \quad z > 0.$$

Первый член этого разложения и представляет собой билинейное Z-преобразование:

$$s = (2/\Delta t)(1-z)/(1+z). \quad (3.2.5.2)$$

По сути, оно представляет собой отображение точек комплексной S -плоскости в точки комплексной Z -плоскости, и наоборот. В общем виде:

$$s = \gamma(1-z)/(1+z), \quad (3.2.5.3)$$

$$z = (\gamma-s)/(\gamma+s). \quad (3.2.5.4)$$

Значение множителя γ не меняет формы преобразования, в связи с чем обычно принимают $\gamma = 1$. Подставим $s = j\omega$ в (3.2.5.4) и выразим z в показательной форме:

$$z = r \exp(j\varphi(\omega)), \quad r = |z| = 1.$$

$$\varphi(\omega) = 2 \operatorname{arctg}(\omega/\gamma),$$

В частности:

$$\omega = 0, \quad z = \exp(j0) = 1,$$

$$\omega = \pm \infty, \quad z = \exp(\pm j\pi) = -1$$

При изменении ω от $-\infty$ до ∞ фазовый угол $\varphi(\omega)$ монотонно изменяется от $-\pi$ до π (см. рис. 3.2.5.1), т.е. мнимая ось S -плоскости ($s = j\omega$, $-\infty < \omega < \infty$) отображается в единичную окружность Z -плоскости, правая половина S -плоскости – внутрь единичной окружности, а левая половина с полюсами устойчивых аналоговых фильтров – снаружи единичной окружности.

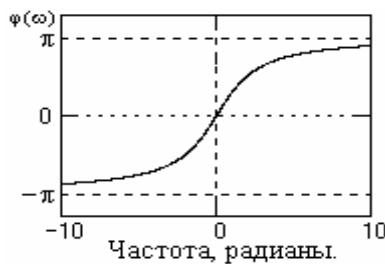


Рис. 3.2.5.1

Деформация частотной шкалы

Реальное отображение передаточных функций фильтров является непрерывным (в силу своей физической сущности) и для упрощения дальнейших расчетов обычно задается в аналитической форме в комплексной S -плоскости по частотному аргументу ω от $-\infty$ до $+\infty$. При билинейном Z -преобразовании происходит нелинейное искажение шкалы частот: полный частотный диапазон от $-\infty$ до ∞ непрерывных функций в S -плоскости сжимается до главного частотного диапазона от $-\pi/\Delta t$ до $\pi/\Delta t$ дискретных функций в Z -плоскости. При задании уравнений непрерывных передаточных функций в частотной области это должно сопровождаться соответствующей обратной деформацией частотной шкалы, которая будет скомпенсирована при билинейном Z -преобразовании. Подставляя в (3.2.5.2) $z = \exp(-j\omega\Delta t)$ и умножая числитель и знаменатель правой части полученного уравнения на $\exp(j\omega\Delta t/2)$, получим:

$$s = (2/\Delta t) [\exp(j\omega\Delta t/2) - \exp(-j\omega\Delta t/2)] / [\exp(j\omega\Delta t/2) + \exp(-j\omega\Delta t/2)],$$

$$s = (2/\Delta t) \operatorname{th}(j\omega\Delta t/2). \quad (3.2.5.5)$$

Обозначим новую шкалу частот в S -области через индекс ω_0 (деформированная) и, полагая $s = j\omega_0$, с учетом тождества $\operatorname{th}(x) = -j \operatorname{tg}(jx)$, получаем:

$$\omega_0 = (2/\Delta t) \operatorname{tg}(\omega\Delta t/2) = \gamma \operatorname{tg}(\omega\Delta t/2), \quad -\pi/\Delta t < \omega < \pi/\Delta t. \quad (3.2.5.6)$$

Выражение (3.2.5.6) позволяет осуществлять переход от фактических частот ω главного частотного диапазона, которым должен соответствовать оператор РЦФ, к деформированным частотам ω_0 комплексной p -плоскости, на которой можно задавать требуемую форму передаточной функции проектируемого фильтра, при этом аппроксимация передаточных функций, учитывая область существования ω от $-\infty$ до ∞ , может производиться многочленами и рациональными функциями. Связь частот приведена на рис. 3.2.5.2 (в начальной части $\pm \pi$ пространства деформированных частот).

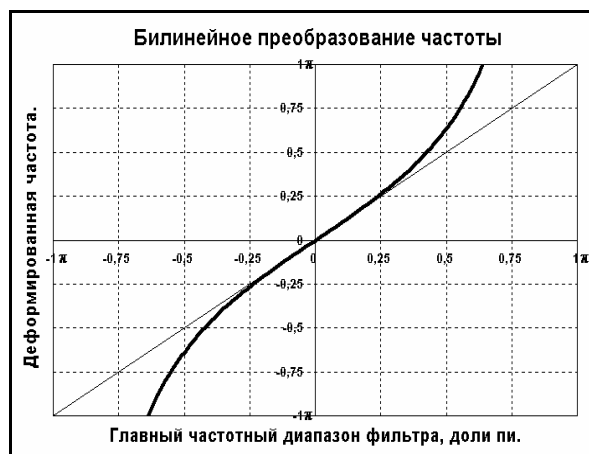


Рис. 3.2.5.2. Деформация частоты

3.3. Уточнение корней полинома

Существует множество итеративных способов улучшить аппроксимацию экспериментальных данных какой-либо детерминированной функцией с неизвестными коэффициентами, при этом вид функции не имеет особого значения. Для улучшения качества аппроксимации экспериментальной АЧХ $R(s)$ имеющейся передаточной функцией $H(s)$ в приложении используется способ возможных направлений, который является наиболее устойчивым при минимизации функционала погрешности аппроксимации, имеющего достаточно сложный рельеф в пространстве его переменных. Сам функционал, представляет собой сумму квадратов отклонений теоретических значений передаточной функции от экспериментальных

$$E = \sum_{i=0}^{n-1} (|R(s_i)| - |H(s_i)|)^2, \tag{3.3.1}$$

при этом $H(s)$ имеет вид (3.1.1).

Абсолютная ошибка аппроксимации будет определяться выражением

$$\varepsilon = \sqrt{E/n}. \tag{3.3.2}$$

Относительная ошибка –

$$\delta = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{||F(s_i)| - |H(s_i)||}{|F(s_i)|}. \tag{3.3.3}$$

Способ возможных направлений заключается в оценке значений, принимаемых функционалом (3.3.1) при изменении одной из его переменных на некоторый шаг в одну и в другую сторону. То направление, которое дает наименьшее значение E , является новым приближением переменной, и следующие итерации производятся относительно него. При достижении локального минимума возможно уменьшение шага, для того чтобы определить его координату более точно.

Данный способ может быть применен поочередно к нескольким переменным. Рассмотрим подробнее все виды возможных уточнений, которым соответствуют различные переменные.

3.3.1. Уточнение частоты среза.

Поскольку зависимость передаточной функции от частоты среза фильтра (F_c) имеется только в каноническом виде, при ее уточнении корни $H(s)$ находятся заново (при неизменном порядке фильтра и количестве полюсов и нулей) согласно выражениям, представленным в [главе 3.2](#). Какое именно выражение используется для расчета $H(s)$, зависит от типа фильтра.

При уточнении делается 100 итераций, при которых частота меняется с шагом 0.001 Гц, то есть прочесывается диапазон шириной 0.1 Гц. Если минимум $E(Fc)$ достигается ранее, то итеративный процесс прекращается досрочно. Обычно одной попытки уточнения бывает достаточно, если аппроксимируемая кривая достаточно гладкая и свободна от значительных ошибок, но все-таки возможна ситуация, когда с первой попытки не удастся достичь локального минимума $E(Fc)$. В этом случае рекомендуется уточнение проводить до тех пор, пока значение погрешности ε не стабилизируется.

3.3.2. Уточнение амплитуды.

При уточнении амплитуды фильтра нет необходимости решать все канонические уравнения заново, чтобы найти корни. В данной ситуации предполагается, что форма АЧХ уже достаточно хорошо подобрана и остается найти только подходящий коэффициент G_s в выражении (3.1.1) или G_z в (3.1.2), или G в (3.1.3). На самом деле достаточно определить лишь один из этих коэффициентов, а остальные привести к нему пропорционально внесенным изменениям.

При уточнении амплитуды делается 100 итераций, при которых коэффициент фильтра меняется на 0.1 % от текущего значения, таким образом прочесывается диапазон с уровнями 0.9-1.1 от первоначального. Если минимум $E(G)$ достигается ранее, то итеративный процесс прекращается досрочно. Обычно одной попытки уточнения бывает достаточно, однако при желании всегда можно процесс повторить, чтобы убедиться, что значение погрешности ε стабилизировалось.

3.3.3. Уточнение полюсов и нулей.

Данный вид уточнения производится в двумерной плоскости комплексных корней, при этом переменными выступают их вещественные (Re) и мнимые части (Im). Особенностью данного вида уточнения является то, что корни могут быть комплексно сопряженными, и их изменение следует проводить парами, обеспечивая физическую реализуемость фильтра. Для осуществления итеративного процесса уравнение (3.1.1) приводится к виду

$$H(s) = G_s (s - s_{nj})(s - s_{nj}^*) \frac{\prod_{i \neq j} (s - s_{ni})}{\prod_i (s - s_{pi})} = G_s (s^2 - 2s_{nj} \cdot \text{Re } s + s_{nj} \cdot \text{Re}^2 + s_{nj} \cdot \text{Im}^2) \frac{\prod_i (s - s_{ni})}{\prod_i (s - s_{pi})} \quad (3.3.4)$$

– для нулей или к виду

$$H(s) = \frac{G_s \prod_i (s - s_{ni})}{(s - s_{pj})(s - s_{pj}^*) \prod_{i \neq j} (s - s_{pi})} = \frac{G_s \prod_i (s - s_{ni})}{(s^2 - 2s_{pj} \cdot \text{Re } s + s_{pj} \cdot \text{Re}^2 + s_{pj} \cdot \text{Im}^2) \prod_{i \neq j} (s - s_{pi})} \quad (3.3.5)$$

– для полюсов. В таком представлении часть $H(s)$, отвечающая за вклад одной пары сопряженных корней, выражена отдельным множителем, что удобно для внесения в них пошаговых изменений.

При уточнении пары сопряженных корней передаточной функции сравниваются значения функционала (3.3.1), соответствующие величинам их вещественной и мнимой части, отличающихся изначально на шаг равный 1. Всего для одной пары корней выполняется 10 итераций, после чего осуществляется переход к следующей паре. Поочередным перебором всех пар корней постепенно находится минимум функционала, который в дальнейшем продолжает уточняться с шагом, уменьшенным вдвое. Этот процесс продолжается до тех пор, пока шаг не станет меньше 0.01 или погрешность аппроксимации не уменьшится до заданной пороговой величины. Итерации также прекратятся, если изменение погрешности станет меньше 1% от этой же пороговой величины.

Дальнейшие попытки уточнения, как и в предыдущих случаях возможны, но, как показывает опыт, к значительному уменьшению погрешности аппроксимации они не приводят. Подробно порядок уточнения описан в главе [Аппроксимация элементарными фильтрами](#).

4. Порядок работы

4.1. Описание элементов приложения

Вся работа приложения реализована в его главном окне, обеспечивающих все необходимые функции для расчета и визуализации фильтров. Главное окно состоит из главного меню, панели инструментов, панели параметров, визуальной части и строки статуса.

4.1.1. Главное меню

Загрузить – группа команд для загрузки файлов ЧХ.

Тестовый свип-сигнал	загрузка тестового сигнала с переменной частотой.
Сигнал из файла	загрузка сигнала из файла для дальнейшей фильтрации.
ЧХ (частота, амплитуда, фаза)	загрузка файла с ЧХ, заданной в виде дискретных значений амплитуд и фаз на разных частотах (<i>FAP</i>).
ЧХ (полюсы и нули)	загрузка файла с ЧХ, заданной на комплексной <i>S</i> -плоскости в виде полюсов и нулей (<i>ZP</i>).

Сохранить – группа команд для сохранения файлов ЧХ.

Полюсы и нули	сохранение (дополнение) файла с передаточной функцией, заданной на комплексной <i>S</i> -плоскости в виде полюсов и нулей (<i>ZP</i>).
Частота, амплитуда, фаза	сохранение (дополнение) файл с ЧХ в виде дискретных значений амплитуд и фаз на разных частотах (<i>FAP</i>).
Коэффициенты	сохранение (дополнение) файла с передаточной функцией, заданной в виде коэффициентов каскада биквадратных блоков.

Конвертеры – меню, объединяющее команды преобразования ЧХ.

Текущий фильтр -> Частота, амплитуда, фаза	расчет ЧХ в виде <i>FAP</i> из передаточной функции фильтра в текущем представлении.
Полюсы и нули -> Коэффициенты	расчет ЧХ в виде <i>C</i> из передаточной функции текущего фильтра, заданной на комплексной <i>Z</i> - или <i>S</i> -плоскости в виде полюсов и нулей.
Коэффициенты -> Полюсы и нули	расчет ЧХ в виде <i>ZP</i> из передаточной функции текущего фильтра, заданной на комплексной <i>Z</i> - или <i>S</i> -плоскости в виде коэффициентов.
<i>S</i>-полюсы -> <i>Z</i>-полюсы	преобразование полюсов, заданных на <i>S</i> -плоскости, в полюсы на <i>Z</i> -плоскости.
<i>Z</i>-полюсы -> <i>S</i>-полюсы	преобразование полюсов, заданных на <i>Z</i> -плоскости, в полюсы на <i>S</i> -плоскости.
<i>AЧХ</i> -> <i>ФЧХ</i> (см. затухание)	расчет <i>ФЧХ</i> из <i>AЧХ</i> с помощью преобразования Гильберта (имеет смысл только для физически реализуемых фильтров).

<i>Затухание на бесконечности</i>	задание типа затухания ЧХ на бесконечности (используется при расчете интеграла Гильберта)
<i>Билогарифмическое</i>	затухание является линейным в билогарифмическом масштабе визуализации
<i>Обратное</i>	затухание является линейным при замене x на $1/x$
<i>Фильтрация</i> – группа команд для фильтрации загруженного сигнала.	
<i>Фильтровать текущим</i>	фильтрация текущим фильтром.
<i>Фильтровать каскадом</i>	фильтрация составленным каскадом.
<i>Направление фильтрации</i>	выбор направления фильтрации (влияет на фазовые искажения).
<i>В одну сторону</i>	фильтрация в один проход (имеются фазовые искажения).
<i>Туда и обратно</i>	фильтрация в два прохода (фазовые искажения компенсируются).
<i>Аппроксимация</i> – группа команд для аппроксимации текущего диапазона загруженной ЧХ	
<i>ФНЧ</i>	аппроксимация фильтром нижних частот.
<i>ФВЧ</i>	аппроксимация фильтром верхних частот.
<i>Режекторный</i>	аппроксимация режекторным фильтром.
<i>Селекторный</i>	аппроксимация селекторным фильтром.
<i>Полосовой</i>	аппроксимация полосовым фильтром.
<i>Заградительный</i>	аппроксимация заградительным фильтром.
<i>Уточнение</i> – группа команд для уточнения аппроксимации.	
<i>Амплитуда</i>	уточнение амплитуды фильтра.
<i>Частота среза слева</i>	уточнение частоты среза слева.
<i>Частота среза справа</i>	уточнение частоты среза справа.
<i>Полюсы</i>	уточнение местоположения полюсов передаточной функции.
<i>Нули</i>	уточнение местоположения нулей передаточной функции.
<i>Каскад</i> – команды для работы с каскадом фильтров.	
<i>Добавить секцию</i>	добавление текущего фильтра в каскад.
<i>Удалить секцию</i>	удаление выделенной секции фильтра из каскада.
<i>Очистить каскад</i>	удаление всех секций фильтра.
<i>Показать</i>	объединение всех секций каскада и выбор его в качестве текущего фильтра.
<i>Обновить секцию</i>	замена выделенной секции текущим фильтром.
<i>Аппроксимировать секцию</i>	аппроксимация выделенной секции каскада.
<i>Аппроксимировать каскад</i>	поочередная аппроксимация всех секции каскада.
<i>?</i> – команды доступа к справочной информации.	
<i>Справка</i>	вызов справочной системы.
<i>О программе</i>	вызов сведений о программе.

Для большинства команд главного меню имеются иконки, символизирующие суть команды. Эти же иконки используются для аналогичных команд, вынесенных на панель инструментов.

4.1.2. Панель инструментов

Панель инструментов дублирует основные и наиболее часто используемые команды, представленные в главном меню. Инструменты (кнопки) панели разделены на группы в соответствие с пунктами главного меню.

Группа команд для загрузки файлов ЧХ



загрузить файл с ЧХ, заданной в виде дискретных значений амплитуд и фаз на разных частотах (*FAP*).



загрузить файл с ЧХ, заданной на комплексной *S*-плоскости в виде полюсов и нулей (*ZP*).

Группа команд для сохранения (дополнения) файлов ЧХ



сохранить файл с ЧХ в виде дискретных значений амплитуд и фаз на разных частотах (*FAP*).



сохранить файл с передаточной функцией, заданной на комплексной *S*-плоскости в виде полюсов и нулей (*ZP*).



сохранить файл с передаточной функцией, заданной в виде коэффициентов каскада полиномов 2-го порядка.

Группа команд для [преобразования ЧХ из одного вида в другой](#)



расчет ЧХ в виде *FAP* из передаточной функции фильтра в текущем представлении.



расчет коэффициентов каскада биквадратных блоков из передаточной функции текущего фильтра, заданной на комплексной *Z*- или *S*-плоскости в виде полюсов и нулей.



расчет полюсов и нулей из передаточной функции текущего фильтра, заданной на комплексной *Z*- или *S*-плоскости в виде коэффициентов каскада биквадратных блоков.



расчет ФЧХ из АЧХ с помощью преобразования Гильберта (имеет смысл только для физически реализуемых фильтров).



преобразование полюсов, заданных на *S*-плоскости, в полюсы на *Z*-плоскости.



преобразование полюсов, заданных на *Z*-плоскости, в полюсы на *S*-плоскости.

Группа команд для [аппроксимации элементарными фильтрами](#)



аппроксимация АЧХ фильтром нижних частот.



аппроксимация АЧХ фильтром верхних частот.



аппроксимация АЧХ режекторным фильтром.



аппроксимация АЧХ селекторным фильтром.



аппроксимация АЧХ полосовым фильтром с одинаковой крутизной слева и справа.



аппроксимация АЧХ заградительным фильтром с одинаковой крутизной слева и справа.



аппроксимация АЧХ каскадом фильтров.

Группа команд для [уточнения результатов аппроксимации](#)



уточнение амплитуды фильтра.



уточнение частоты среза слева.



уточнение частоты среза справа.



уточнение полюсов фильтра.



уточнение нулей фильтра.

Группа команд для [работы с каскадом](#)



добавление текущего фильтра в качестве секции каскада.



удаление выделенной секции каскада.



обновление выделенной секции каскада (замена параметрами текущего фильтра).



очистка каскада (удаление всех секций).



объединение всех секций каскада и выбор его в качестве текущего фильтра.

4.1.3. Панель параметров

Панель параметров расположена под панелью инструментов и позволяет менять тип и параметры того, что отображается на диаграмме графиков и диаграмме корней передаточной функции.

Панель состоит из нескольких вкладок, разделяющих параметры на основные группы.

4.1.3.1. Расчет фильтров

Вкладка содержит параметры, используемые при расчете элементарных фильтров.

Тип фильтра. Переключатель, с помощью которого выбирается тип элементарного фильтра, который необходимо рассчитать. Смена типа сопровождается расчетом новых корней передаточной функции фильтра и визуализации всех его параметров.

Разновидность. Переключатель между двумя разновидностями фильтров: фильтров Баттерворта и фильтров Чебышева. Выбор разновидности фильтра доступен только для ФНЧ, ФВЧ, ПФ, и ПЗФ.

Параметры фильтра. Группа объединяет основные параметры фильтра.

Частота среза, Гц. Параметр устанавливает частоту среза рассчитываемого фильтра F_c . На частоте среза значение квадрата АЧХ равно половине максимального значения в полосе пропускания. Если фильтр имеет только одну частоту среза (ФНЧ, ФВЧ), то доступно только одно поле: *снизу F_{c1}* – для ФВЧ и *сверху F_{c2}* – для ФНЧ.

Порядок фильтра. Параметр устанавливает порядок фильтра. Чем больше порядок, тем круче спад АЧХ на граничной частоте. Важно иметь в виду, в каком способе фильтрации будет использоваться данный фильтр. Если фильтрация будет проходить в обе стороны временного ряда, то результат будет сопоставим с однократной фильтрацией фильтра, порядок которого в 2 раза больше. Если фильтр имеет только частоту среза слева от полосы пропускания (ФВЧ), то доступно левое поле, если справа (ФНЧ), то правое. Для фильтров, имеющих две частоты среза (полосовой и заградительный) доступно только одно левое поле, так как крутизна спада слева и справа у элементарного фильтра принимается одинаковой. Для режекторного и селекторного фильтров крутизна регулируется близостью частот среза.

Кэф. неравномерности. Коэффициент устанавливает величину относительных пульсаций ЧХ фильтра в полосе пропускания и полосе подавления. Величина параметра задается в долях размаха фильтра (возможные значения от 0,01 до 0,5). Для простоты принято, что коэффициент неравномерности для полосы пропускания (A_p) всегда равен коэффициенту неравномерности для полосы подавления (A_s). Если фильтр имеет только частоту среза слева от полосы пропускания (ФВЧ), то доступно левое поле, если справа (ФНЧ), то правое. Для фильтров, имеющих две частоты среза (полосовой и заградительный) доступно только одно левое поле, так как неравномерность АЧХ слева и справа у элементарного фильтра принима-

ется одинаковой. Для режекторного и селекторного фильтров коэффициент неравномерности не используется.

Частота дискретизации. Задайте частоту дискретизации сигнала, который предстоит фильтровать рассчитываемым фильтром. Коэффициенты фильтров, заданных на Z -плоскости и в виде каскада полиномов второй степени, имеют связь с частотой дискретизации и могут быть применены только к рядам с соответствующей оцифровкой. При расчете фильтров на S -плоскости величина данного параметра значения не имеет.

Рассчитать. Нажатие этой кнопки инициализирует расчет и визуализацию корней передаточной функции фильтра и визуализацию его ЧХ. Рассчитанные изменения параметров фильтра находят отражение в строковом информаторе группы **Параметры фильтра**. Здесь на основании граничных частот, порядка и коэффициентов неравномерности рассчитываются границы полосы пропускания и полосы подавления. Порядок фильтра также переводится в крутизну АЧХ, выраженную в дБ/окт.

4.1.3.2. Передаточная функция

Вкладка содержит параметры передаточной функции текущего фильтра. Текущим фильтром может быть:

- один из элементарных фильтров, рассчитываемых с помощью параметров во вкладке

Расчет фильтров;

- любой элементарный фильтр, полученный в результате аппроксимации ЧХ;
- каскад, составленный из любых двух предыдущих видов фильтров.



N°	Re	Im
1	-58.248331161764	179.269929884493
2	-152.496110769458	110.794909829427
3	-188.495559215388	-5.10918237012983E-18
4	-152.496110769458	-110.794909829427
5	-58.248331161764	-179.269929884493

Нули. При выборе полюсов и нулей как [Способа представления](#) поле устанавливает количество нулей передаточной функции фильтра. При расчете элементарных фильтров это поле устанавливается автоматически для каждого типа фильтра. Однако количество нулей можно менять вручную и редактировать их значения в списке ниже. Любые изменения в наборе нулей находят отражение на [Комплексной плоскости](#). Изменения на [Диаграмме графиков](#) появятся только после команды **Текущий фильтр -> Частота, амплитуда, фаза** в меню **Конвертеры**.

Полюсы. При выборе полюсов и нулей как [Способа представления](#) поле устанавливает количество полюсов передаточной функции фильтра. При расчете элементарных фильтров это поле устанавливается автоматически для каждого типа фильтра. Однако количество полюсов можно менять вручную и редактировать их значения в списке ниже. Любые изменения в наборе полюсов находят отражение на [Комплексной плоскости](#). Изменения на [Диаграмме графиков](#) появятся только после команды **Текущий фильтр -> Частота, амплитуда, фаза** в меню **Конвертеры**.

Коэффициенты числителя. При выборе коэффициентов как [Способа представления](#) фильтра поле устанавливает количество полиномов 2-го порядка в числителе передаточной функции фильтра. При расчете элементарных фильтров это поле устанавливается автоматически для каждого типа фильтра. Однако количество полиномов можно менять вручную и редактировать значения их корней в списке ниже. Для каждого полинома числителя задается три коэффициента ($b[2]$ – коэффициент при переменной второй степени, $b[1]$ – коэффициент при переменной первой степени, $b[0]$ – свободный коэффициент). Любые изменения в наборе коэффициентов найдут отражение на [Диаграмме графиков](#) после использования команды **Текущий фильтр -> Частота, амплитуда, фаза** в меню **Конвертеры**.

Коэффициенты знаменателя. При выборе коэффициентов как Способа представления фильтра поле устанавливает количество полиномов 2-го порядка в знаменателе передаточной функции фильтра. При расчете элементарных фильтров это поле устанавливается автоматически для каждого типа фильтра. Однако количество полиномов можно менять вручную и редактировать значения их корней в списке ниже. Для каждого полинома знаменателя задается два коэффициента ($a[2]$ – коэффициент при переменной второй степени, $a[1]$ – коэффициент при переменной первой степени). Значение свободного коэффициента $a[0]$ не задается, так как все полиномы рассчитываются таким образом, чтобы коэффициент $a[0]$ всегда был равен 1. Любые изменения в наборе коэффициентов найдут отражение на Диаграмме графиков после использования команды **Текущий фильтр -> Частота, амплитуда, фаза** в меню **Конвертеры**.

Нормировка. Набор полюсов и нулей передаточной функции влияет, главным образом, на форму ЧХ, при этом ее амплитуда может иметь произвольное значение. Для того, чтобы приблизить ее к нужному уровню, необходимо использовать нормировку. Нормировка выполняется автоматически при расчете фильтра, однако после изменения параметров нормировки эту процедуру можно повторить, не пересчитывая фильтр, с помощью кнопки . Данная команда позволяет отнормировать только выбранный способ представления передаточной функции в указанной области отображения. Для синхронной нормировки всех вариантов представления и отображения передаточной функции следует использовать кнопку . Доступно два способа нормировки: по значению АЧХ на некоторой частоте и с помощью нормировочного коэффициента.

Отсутствует. Один из доступных вариантов нормировки, использующий способ нормировки по значению АЧХ на некоторой частоте. Вариант используется по умолчанию при расчете элементарных фильтров, значение АЧХ которых в полосе пропускания должно быть равно 1. Частота нормировки зависит от типа выбранного фильтра. Для ФНЧ частота равна 0 Гц, для ФВЧ, режекторного и заградительного фильтров она принимается равной частоте Найквиста, для полосового – среднему геометрическому частот среза, селекторного – центральной частоте. Также этот вариант можно выбирать для любого создаваемого фильтра, если необходима его нормировка к единичному уровню, при этом частоту нормировки следует задать вручную. Включение переключателя автоматически устанавливает 1 в поле **Значение АЧХ**. В соответствие с ним рассчитывается нормировочный коэффициент, который отображается в поле **Множитель ЧХ**.

Частота нормировки, Гц. Параметр задает частоту нормировки способом по значению АЧХ. Установите ту частоту, где значение АЧХ известно и задано в поле **Значение АЧХ**.

Значение АЧХ. Переключатель задает способ нормировки передаточной функции по значению АЧХ на **Частоте нормировки**. Включение способа делает доступным поле для задания нужного уровня АЧХ. В соответствие с ним рассчитывается нормировочный коэффициент, который отображается в поле **Множитель ЧХ**.

Множитель ЧХ. Переключатель задает способ нормировки передаточной функции с помощью нормировочного коэффициента. Передаточная функция будет умножена на коэффициент, заданный в этом поле, при этом в соответствие с ним рассчитывается **Значение АЧХ** на указанной **Частоте нормировки**.

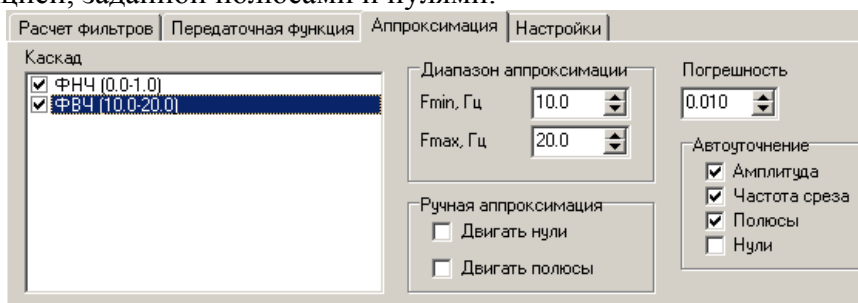
Способ представления. Выберите способ представления передаточной функции. Имеется два варианта представления: в виде комплексных корней (полюсов и нулей) и в виде вещественных коэффициентов. Если выбраны **Полюсы и нули**, то в списках на вкладке будут отображаться полюсы и нули, одновременно с их визуализацией на комплексной плоскости. При выборе **Коэффициентов** списки будут содержать вещественные корни полиномов **Числителя** и **Знаменателя** передаточной функции.

Область отображения. Для отображения передаточной функции может быть выбрана одна из двух комплексных плоскостей: Z -плоскость (область Z -преобразования) и S -плоскость (плоскость Лапласа). Значения комплексных корней (полюсов и нулей) или веще-

ственных коэффициентов) будут отображаться в списках в соответствии с выбранной областью отображения.

4.1.3.3. Аппроксимация

Вкладка содержит параметры и настройки, используемые при аппроксимации ЧХ передаточной функцией, заданной полюсами и нулями.



Каскад. Данное окно содержит список секций каскада, каждой из которых соответствует один элементарный фильтр, аппроксимирующий часть диапазона ЧХ. Имя секции составлено из названия элементарного фильтра и диапазона частот для аппроксимации. Выделение одного из элементов списка позволяет выполнять с ним различные действия обновления и удаления. Двойной щелчок по элементу списка делает фильтр секции текущим, что приводит к загрузке его корней (полюсов, нулей или коэффициентов) в таблицы на вкладке [Передаточная функция](#) и на диаграмму с *Комплексной плоскостью*. Также это изменяет вид *Диаграммы графиков* – на ней отображается линия, аппроксимирующая ЧХ в текущих пределах.

Список *Каскад* имеет контекстное меню из двух пунктов: [Аппроксимировать секцию](#) и [Аппроксимировать каскад](#).

Диапазон аппроксимации. Группа полей, определяющих диапазон аппроксимации текущего фильтра.

Fmin, Гц. Нижняя граница диапазона аппроксимации текущего фильтра.

Fmax, Гц. Верхняя граница диапазона аппроксимации текущего фильтра.

Погрешность. Величина абсолютной погрешности аппроксимации, используемая как критерий, по достижению которого итеративная процедура аппроксимации прекращается. Если не удастся достичь заданной погрешности (принципиально невозможно при текущем наборе полюсов и нулей), используется дополнительный критерий – изменение погрешности аппроксимации в двух последовательных итерациях на величину не меньше тысячной доли текущего значения погрешности.

Ручная аппроксимация. Группа выключателей, позволяющих двигать полюсы и нули непосредственно на комплексной плоскости с помощью мыши. Щелкните средней кнопкой мыши над нужным корнем передаточной функции и передвиньте в другое место. Захват и смещение одного корня всегда сопровождается смещением комплексно сопряженного с ним корня (если имеется). Изменение положения корней сопровождается расчетом новой ЧХ, которая отображается на диаграмме графиков.

Двигать нули. Включение данного параметра позволяет при выборе корней передаточной функции реагировать только на нули. Имеет значение, когда полюсы и нули расположены слишком близко друг к другу.

Двигать полюсы. Включение данного параметра позволяет при выборе корней передаточной функции реагировать только на полюсы. Имеет значение, когда полюсы и нули расположены слишком близко друг к другу.

Автоуточнение. Группа выключателей, влияющих на содержание процедуры автоматического уточнения параметров фильтра.

Амплитуда. Установите этот флаг, если после грубой аппроксимации АЧХ необходимо уточнить амплитуду фильтра посредством итеративной минимизации погрешности.

Частота среза. Установите этот флаг, если после грубой аппроксимации АЧХ необходимо уточнить частоту среза (одну или обе – зависит от типа фильтра) фильтра посредством итеративной минимизации погрешности.

Полюсы. Установите этот флаг, если после грубой аппроксимации АЧХ необходимо уточнить местоположение полюсов фильтра посредством итеративной минимизации погрешности.

Нули. Установите этот флаг, если после грубой аппроксимации АЧХ необходимо уточнить местоположение нулей фильтра посредством итеративной минимизации погрешности.

4.1.3.4. Настройки

Вкладка содержит дополнительные сведения о фильтре.

Сведения о фильтре. Группа параметров фильтра, которые будут сохраняться в файл с ЧХ.

Единицы на входе/выходе. Задайте единицы измерения величин, характерных для данного прибора на его входе/выходе. Например, датчики имеют на входе одну из величин: м (смещение), м/с (скорость), м/с² (ускорение), В (напряжение). На выходе датчики, как правило, имеют напряжение (В). Усилители на входе и выходе имеют одинаковые величины: напряжение (В) или безразмерные (нет). АЦП имеют на входе напряжение, на выходе – цифровые значения, то есть безразмерные величины. Единицы измерения сложной системы, состоящей из различных приборов, получаются из единиц измерения первого и последнего ее элементов.

Модель прибора. Задайте модель прибора, для которого создается или подбирается передаточная функция.

Серийный номер. Задайте серийный номер или другой идентификатор прибора, для которого создается или подбирается передаточная функция.

Дата калибровки. Задайте дату калибровки прибора, для которого создается или подбирается передаточная функция.

Примечание. Заполните поле с примечанием к прибору, если это необходимо.

4.1.3.5. Калькулятор

Вкладка содержит поля для выполнения пересчета переменных из одной комплексной плоскости в другую.

S.Re. Поле для ввода вещественной части переменной на S-плоскости. Всего имеется два поля. При вводе значения в любое из них производится пересчет переменной в Z-плоскость согласно формулам билинейного Z-преобразования. Результат преобразования по

первой формуле помещается в первую строку переменной Z , результат преобразования по второй формуле помещается во вторую строку переменной Z .

S.Im. Поле для ввода вещественной части переменной на S -плоскости. Всего имеется два поля. При вводе значения в любое из них производится пересчет переменной в Z -плоскость согласно двум формулам билинейного преобразования.

Z.Re. Поле для ввода вещественной части переменной на Z -плоскости. Всего имеется два поля. При вводе значения в любое из них производится пересчет переменной в S -плоскость согласно обратным формулам билинейного Z -преобразования. Результат преобразования по первой формуле помещается в первую строку переменной S , результат преобразования по второй формуле помещается во вторую строку переменной S .

Z.Im. Поле для ввода вещественной части переменной на Z -плоскости. Всего имеется два поля. При вводе значения в любое из них производится пересчет переменной в S -плоскость согласно двум обратным формулам билинейного преобразования.

Частота среза, Гц. При билинейном Z -преобразовании имеет место деформация частотной шкалы. **Деформированная** частота (аналог действительной на Z -плоскости) используется для эмуляции бесконечности области определения частоты при ее фактической ограниченности частотой Найквиста. Изменение **действительной** частоты приведет к расчету ее деформированного аналога в поле справа. Точно так же ввод деформированной частоты будет сопровождаться расчетом соответствующей ей действительной частоты.

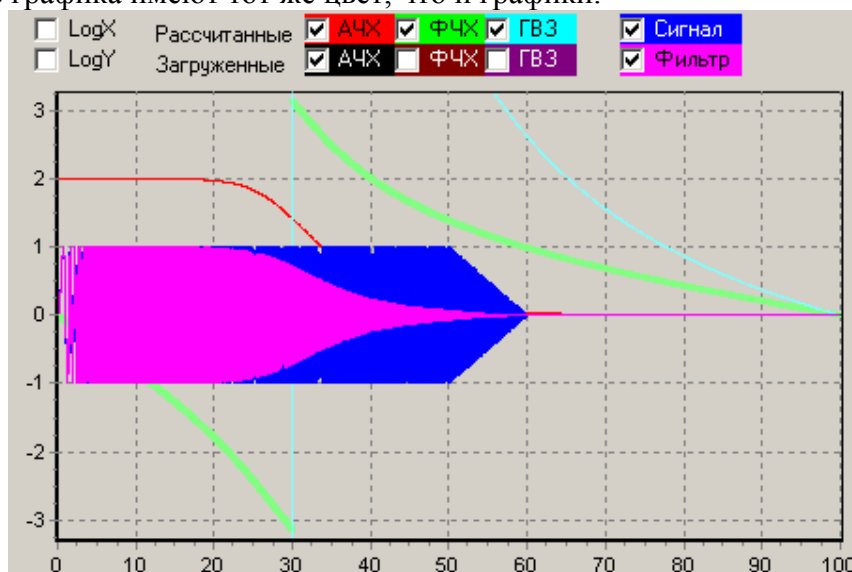
4.1.4. Диаграммы

В приложении имеется два вида диаграмм, отражающих всю необходимую графическую информацию для контроля правильности выбора параметров расчета или точности аппроксимации ЧХ.

Навигация в обоих видах диаграмм одинакова: нажатие правой кнопки мыши и движение курсора ведет к изменению границ визуализации без изменения масштаба. Щелчок левой кнопкой мыши и движение указателя вправо-вниз позволяет выделить новый диапазон данных для визуализации. Та же манипуляция но при движении отличным от движения вправо-вниз приведет к восстановлению первоначального диапазона.

4.1.4.1. Диаграмма графиков

На данной диаграмме могут отображаться графики АЧХ, ФЧХ, ГВЗ. Также здесь возможно отобразить сигнал для фильтрации и сигнал после фильтрации. Набор визуализируемых элементов и масштаб визуализации выбирается в верхней части диаграммы. Выключатели элементов графика имеют тот же цвет, что и графики.



Пример диаграммы с графиками АЧХ, ФЧХ, ГВЗ, сигнала и фильтрованного сигнала

При визуализации частотных характеристик принимается во внимание, какой фильтр является текущим. Если фильтр рассчитан, то визуализируется именно та разновидность представления его передаточной функции, которая указана на переключателе **Область отображения**. После конвертирования одного представления передаточной функции в другой текущим фильтром становится результат конверсии. Текущими также могут стать каскад фильтров или любая из его секций.

Ниже на рисунке показан пример диаграммы, на которой отображены 5 графиков: АЧХ рассчитанного фильтра нижних частот 4-го порядка с частотой среза 30 Гц и амплитудой 2 (красный), его ФЧХ (зеленый), его ГВЗ (голубой), тестовый свип-сигнал (синий) и результат однократной фильтрации тестового сигнала таким же фильтром с амплитудой 1 (розовый).

LogX и LogY. Выключатели, состояние которых влияет на масштаб визуализации (линейный или логарифмический) на диаграмме графиков.

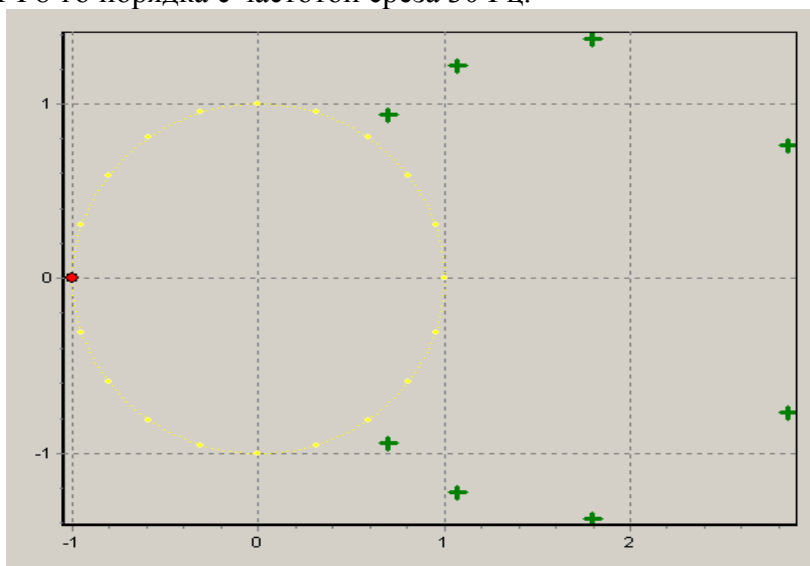
Рассчитанные/Загруженные АЧХ, ФЧХ, ГВЗ. Группа выключателей, влияющих на набор составляющих ЧХ, визуализируемых на диаграмме графиков. Рассчитанные графики являются результатом расчета или аппроксимации. Загруженные – те, которые были загружены из внешних файлов через команды **ЧХ (частота, амплитуда, фаза)** или **ЧХ (полюсы и нули)** из меню **Загрузить**. Установка флагов АЧХ позволяет показать графики амплитудно-частотных характеристик, установка флагов ФЧХ позволяет показать графики фазо-частотных характеристик, установка флагов ГВЗ позволяет показать графики группового времени задержки, которое рассчитывается из ФЧХ и заданной **Частоты дискретизации**.

Сигнал. Флаг позволяющий отобразить на диаграмме графиков сигнал, загруженный с помощью команд **Тестовый свип-сигнал** или **Сигнал из файла** из меню **Загрузить**.

Фильтр. Флаг позволяющий отобразить на диаграмме графиков результат фильтрации загруженного сигнала.

4.1.4.2. Комплексная плоскость

На данной диаграмме отображаются корни передаточной функции – нули (красные кружки) и полюсы (зеленые крестики). Какая именно разновидность комплексной плоскости используется, указывается переключателем **Область отображения**. На диаграмме дополнительно отображена единичная окружность, которая состоит из желтых точек разного размера, имитирующих шкалу частот на Z -плоскости. Крупные точки отмечают основные интервалы частот от нуля (правая точка) до частоты Найквиста (левая точка). Мелкие точки отмечают промежуточные значения внутри основных интервалов. Так, например, для частоты дискретизации 200 Гц основными интервалами будут иметь ширину 10 Гц, а промежуточные 1 Гц. На рисунке ниже показан пример такой шкалы вместе с полюсами и нулями передаточной функции ФНЧ 8-го порядка с частотой среза 30 Гц.



Пример визуализации корней передаточной функции на Z -плоскости

4.1.5. Строка статуса

Строка статуса отображает дополнительную информацию об элементах управления, расположенных в главном окне. Контекстная информация отображается в левой половине строки статуса и появляется при наведении курсора мыши на интересующий элемент управления (меню, кнопка, поле ввода, список, выключатель и др.). При выполнении аппроксимации информационные сообщения о погрешности аппроксимации будут высвечиваться в правой части строки статуса.

4.2. Расчет элементарных фильтров

Элементарные фильтры

Под элементарными фильтрами подразумеваются фильтры, для которых известны все теоретические представления, такие как передаточная функция (полюсы и нули на Z - или S -плоскости или вещественные коэффициенты полиномов 2-го порядка) и функция, определяющая форму ЧХ. Коэффициенты всех этих функций можно получить из параметров фильтра, которые более удобны для нашего восприятия. Это частота среза (F_c), порядок фильтра (N), коэффициенты неравномерности в полосе пропускания (A_p) и полосе подавления (A_s), граничные частоты этих полос.

Такие теоретические представления имеются для различных типов фильтров, разработанных разными авторами (Баттерворт, Чебышев и др.), однако в данной системе реализован расчет только [фильтра нижних частот](#) Баттерворта, который и считается элементарным. На его основе в результате замены переменной частоты можно получить функции [фильтров верхних частот](#), а также [полосового](#) и [заградительного фильтра](#) с одинаковой крутизной спада ЧХ слева и справа. Эти фильтры также будем считать элементарными. Список элементарных фильтров завершают [режекторный](#) и [селекторный](#) фильтры, выражения для которых получаются непосредственно из корней, зависящих от их центральных частот. Более подробные сведения о передаточных функциях этих элементарных фильтров приведены в главе [Рекурсивные фильтры Баттерворта](#).

Расчет

Для расчета элементарных фильтров необходимо перейти в панели параметров на вкладку *Расчет фильтров*. На вкладке выбрать *Тип фильтра*, *Параметры фильтра*, задать *Частоту дискретизации* и нажать кнопку *Рассчитать*. После расчета на *Диаграмме графиков* появятся графики АЧХ, ФЧХ и ГВЗ, а на *Комплексной плоскости* появятся корни передаточной функции – полюсы и нули. Числовые значения корней будут помещены в соответствующие таблицы на вкладке *Передаточная функция*. В группе *Параметры фильтра* каждый расчет будет сопровождаться выдачей дополнительной информации о граничных частотах полосы подавления (F_p) и граничных частотах полосы пропускания (F_s), зависящих от установленных коэффициентов неравномерности (A_s и A_p).

Нормировка

При расчете можно использовать три способа нормировки, соответствующих вариантам переключателя в группе параметров [Нормировка](#).

Вариант *Значение АЧХ* позволяет получить нужный уровень АЧХ, опираясь на одно известное ее значение, заданное на некоторой *Частоте нормировки*, G_c . Нормировочный коэффициент будет рассчитан из отношения желаемой и действительной амплитуд на частоте нормировки.

Вариант *Множитель ЧХ* позволяет задать коэффициенты передаточной функции непосредственно.

Если нормировка *Отсутствует*, выполняется первый способ нормировки, но при этом значение АЧХ будет установлено равным 1, а частота нормировки будет выбрана автоматически в зависимости от типа фильтра. См. также описание группы параметров [Нормировка](#).

Особым образом осуществляется нормировка фильтра, представленного в виде коэффициентов. Множитель такого фильтра (G) всегда делается равным 1, так как переносится в

коэффициенты b числителя. Если фильтр представлен каскадом из N секций, то коэффициенты b каждой секции больше своих первоначальных значений в $\sqrt[N]{G}$ раз.

Сохранение

Передаточные функции фильтров можно сохранить в отдельный файл для дальнейшего использования (меню **Сохранить**) во всех трех способах представления. При сохранении используется формат *RSP*, который устанавливается по умолчанию, но может выбираться в диалоговом окне сохранения из списка под именем файла. Формат предусматривает хранение всех трех разновидностей представления. Если сохранение происходит в существующий файл, то имеющиеся в нем данные НЕ СТИРАЮТСЯ а обновляются или дополняются. Если сохраняемая информация в файле отсутствует, в нем создается нужная секция (как в *INI*-файле), если аналогичная информация уже имеется, то соответствующая секция обновляется.

Сохранение фильтра в виде *FAP* (частота, амплитуда, фаза) происходит в виде ряда значений с равномерным шагом по частоте, зависящем от частоты дискретизации.

Если созданные фильтры несут информацию о передаточной функции некоторой системы (например, датчика или канала сейсмической станции), то следует использовать команду меню **Сохранить** \ **Полюсы и нули**. Если сохраняемые данные предстоит использовать в *WSG*, то выберите формат сохранения *SAC*. При сохранении полюсов и нулей в любом формате в файл записываются только их представление в S -плоскости, которое не зависит от частоты дискретизации и наиболее широко используется в сейсмологии.

Сохранение коэффициентов фильтра имеет смысл, если они будут использованы для данных, оцифрованных с той же частотой дискретизации, для которой данный фильтр был рассчитан.

4.3. Аппроксимация

Аппроксимация является одним из способов создания цифрового фильтра, если изначально известна лишь его частотная характеристика (обычно только АЧХ). В данном приложении реализована аппроксимация ЧХ любым из элементарных фильтров или каскадом элементарных фильтров.

4.3.1. Аппроксимация элементарными фильтрами

Если форма имеющейся дискретной ЧХ, представленной в виде *FAP*, достаточно проста, ее можно попытаться аппроксимировать передаточной функцией элементарного фильтра. Какой именно тип фильтра выбрать, зависит от формы АЧХ.

Для того, чтобы приступить к аппроксимации, сначала нужно загрузить аппроксимируемый фильтр с помощью команды **ЧХ (частота, амплитуда, фаза)** из меню **Загрузить**.

Отметьте флагом выключатель **АЧХ** в строке **Загруженные** на вкладке **Настройки** на **Панели параметров**, чтобы график с АЧХ из файла был виден на диаграмме графиков. Если необходима визуализация ФЧХ и ГВЗ, отметьте соответствующие выключатели тоже. Там же отметьте выключатель **АЧХ (ФЧХ, ГВЗ)** в строке **Рассчитанные**, чтобы показать аналогичные аппроксимирующие рассчитанные графики.

Выберите тот тип фильтра, который наиболее соответствует форме загруженной АЧХ. Меняя параметры фильтра, добейтесь наилучшего совпадения двух графиков АЧХ. Количественной мерой совпадения значений АЧХ является погрешность аппроксимации, выраженная в абсолютных единицах и в процентах. Чем меньше погрешность, тем лучше аппроксимация. Величина погрешности рассчитывается каждый раз при нажатии кнопки **Рассчитать** и отображается в правой части строки статуса.

Данный способ аппроксимации является итеративным и может занять много времени для того, чтобы добиться наилучшего совпадения АЧХ, однако он достаточно хорошо формализуется, если известен тип фильтра. быстрый подбор параметров фильтра и корней его передаточной функции реализован в автоматической процедуре аппроксимации, которая запускается при вызове одной из команд в меню **Аппроксимация**. Выбор команды зависит от типа фильтра.

При автоматической аппроксимации принимаются во внимание следующие параметры: частотный диапазон аппроксимации и погрешность аппроксимации. Аппроксимация будет выполняться только в частотном диапазоне, заданном с помощью полей *Fmin* и *Fmax*. Величина погрешности аппроксимации, используется как критерий, по достижению которого итеративная процедура аппроксимации прекращается. Если не удается достичь заданной погрешности (принципиально невозможно при текущем наборе полюсов и нулей), используется дополнительный критерий – изменение погрешности аппроксимации в двух последовательных итерациях на величину не меньше тысячной доли текущего значения погрешности.

Алгоритм аппроксимации включает следующие шаги, каждый из которых также может быть реализован отдельно.

1. Поиск частоты среза. Для ФНЧ, ФВЧ, полосового и заградительного фильтров поиск выполняется от максимального значения АЧХ в сторону убывания амплитуд до значения, равного 0.707 от максимального. Если этот уровень попадает на интервал между дискретными значениями АЧХ, то частота среза интерполируется. Для режекторного и селекторного фильтров находится минимальное (максимальное) значение АЧХ, частота которого принимается за центральную. От центральной частоты по уровню $\sqrt{0.5} \approx 0.707$ от максимального значения находятся частоты среза. Отдельно этап реализуется только вручную.

2. Оценка порядка фильтра. Для ФНЧ, ФВЧ, полосового и заградительного фильтров порядок фильтра есть не что иное, как величина наклона асимптоты, к которой стремится линейная часть спада АЧХ, которая должна быть представлена в билогарифмическом масштабе. Порядок оценивается по крайним точкам АЧХ на ее спаде, начиная с частоты среза до граничной частоты диапазона аппроксимации (минимальное количество точек – две). Для режекторного и селекторного фильтров порядок фильтров не оценивается, так как крутизна спада определяется расстоянием между частотами среза. Отдельно этап реализуется только вручную.

3. Нормировка. Подбирается нормировочный коэффициент так, чтобы амплитудный уровень загруженного фильтра (берется максимальное значение) совпадал с уровнем аппроксимирующего. Отдельно этап реализуется только вручную.

4. Уточнение частоты среза и амплитуды. Используется поиск локального минимума относительно решения, найденного на предыдущих этапах, методом возможных направлений сначала по переменной частоты среза, затем по амплитуде. Отдельно этап реализуется командами *Амплитуда*, *Частота среза слева* и *Частота среза справа* в меню *Уточнение*.

5. Уточнение полюсов и нулей. Используется поиск локального минимума относительно решения, найденного на предыдущих этапах, методом возможных направлений по двум переменным (вещественная часть и мнимая часть) для каждого из корней передаточной функции. Отдельно этап реализуется для всех типов фильтров командами *Уточнение \ Полюсы* и *Уточнение \ Нули*.

Последний этап достаточно эффективен для всех типов фильтров и, как правило, после него улучшить аппроксимацию весьма затруднительно. Тем не менее, у пользователя всегда есть возможность изменить местоположение полюсов и нулей вручную (см. [Ручная аппроксимация](#)). Для этого необходимо включить режим *Двигать нули* или *Двигать полюсы* на вкладке *Аппроксимация* и приступить к ручному перемещению корней. Перемещение выполняется с помощью мыши при нажатой средней кнопке. Для того чтобы фильтры получались физически реализуемыми, корни двигаются парами совместно с комплексно-сопряженными полюсами (нулями).

4.3.2. Аппроксимация каскадом фильтров

Передаточную функцию со сложной частотной характеристикой, которую невозможно получить, используя какой-либо один простой фильтр, можно аппроксимировать каскадом простых фильтров.

4.3.2.1. Формирование каскада

Для того, чтобы аппроксимировать сложную ЧХ каскадом, сначала нужно определиться, набором каких простых фильтров можно этот каскад сформировать. Так, например, полосовой фильтр с различными спадами АЧХ на краях можно составить из двух простых: ФНЧ и ФВЧ. Другим примером каскада может послужить фильтр, устраняющий целый ряд электрических помех, таких как 25, 50, 100 Гц. Такой каскад будет состоять из трех режекторных фильтров с соответствующими частотами подавления.

Таким образом, аппроксимация сводится к формированию каскада, каждая секция которого отвечает только за некоторый интервал АЧХ. Аппроксимация участка АЧХ элементарным фильтром описана в главе [Аппроксимация элементарными фильтрами](#). После того, как подбор параметров простых фильтров для каждого такого интервала завершен, ЧХ всего каскада получается в результате произведения передаточных функций каждой составляющей его секции. При аппроксимации каскада активно используется так называемый текущий фильтр, являющийся временным звеном почти на каждом этапе аппроксимации.

Если каскад создается впервые, то последовательность действий при его формировании следующая:

- 1) Задайте частотный диапазон, где АЧХ можно аппроксимировать элементарным фильтром. Диапазон аппроксимации задается с помощью полей *Fmin* и *Fmax*.
- 2) В меню *Аппроксимация* выбрать команду, соответствующую типу простого фильтра, которым будет аппроксимироваться АЧХ на выбранном интервале частот.
- 3) Уточните параметры фильтра вручную, если это необходимо. Используйте параметры фильтра, такие как *Частота среза*, *Порядок фильтра*, *Коэффициенты неравномерности*. Возможно использовать ручное смещение полюсов и нулей на комплексной плоскости.
- 4) В меню *Каскад* выберите команду *Добавить секцию*, что приведет к созданию новой секции каскада и копированию в нее всех параметров созданного текущего фильтра.
- 5) Если каскад уже имеет секции и необходимо заменить параметры одной из них на другие, то необходимо в списке секций выделить нужную и в меню *Каскад* выбрать команду *Обновить секцию*.
- 6) Если каскад имеет секции и необходимо удалить одну из них, то в списке секций выделите нужную и в меню *Каскад* выберите команду *Удалить секцию*.
- 7) Если каскад имеет секции и необходимо сформировать новый каскад, то в меню *Каскад* выберите команду *Очистить каскад*.
- 8) Действия 1-4 выполняются для каждого интервала АЧХ, который можно аппроксимировать элементарным фильтром. Действия 5-6 опциональны и при правильном подборе АЧХ на этапах 1-4 в них необходимости не возникнет. Действие 7 необходимо в случае формирования нескольких каскадов.
- 9) Если для всех интервалов аппроксимация завершена, каскад можно считать сформированным и его можно сделать текущим, вызвав команду *Каскад \ Показать*. Это команда выполняет умножение секций с сокращением одинаковых корней в числителе и знаменателе, после чего отображает передаточную функцию фильтра в текстовом и графическом виде. Корни передаточной функции будут помещены в таблицы на вкладке *Передаточная функция* и на комплексную плоскость. ЧХ фильтра будет показана на диаграмме графиков.
- 10) Убедитесь, что полученная АЧХ соответствует загруженной и при удовлетворительном результате воспользуйтесь командой сохранения передаточной функции в файл с помощью любой из команд в меню *Сохранить*.

Не рекомендуется менять способ и коэффициенты нормировки, поскольку готовый каскад опирается на единые параметры, используемые в каждой секции. Для того, чтобы не воз-

никло проблем с объединением секций, выберите частоту нормировки до того как приступите к аппроксимации.

4.3.2.2. Использование готового каскада

Если каскад сформирован, то его можно использовать для аппроксимации множества однотипных ЧХ, имеющих аналогичную структуру. Для этого необходимо просто загрузить новую ЧХ командой *Загрузить | ЧХ (частота амплитуда, фаза)*, после чего воспользоваться вариантом аппроксимации всего каскада целиком с помощью команды *Каскад | Аппроксимировать каскад*. Данная команда вызывает процедуру, которая последовательно для каждой секции выполняет автоматическую аппроксимацию согласно алгоритму, описанному в главе [Аппроксимация элементарными фильтрами](#). При удовлетворительном результате аппроксимации результаты можно сохранить в файл.

Если одна аппроксимация одной из секций оказалась не очень удачной, возможно продолжить итеративный процесс подбора передаточной функции только для этой секции. Для этого необходимо выделить нужную секцию в списке и применить команду *Каскад | Аппроксимировать секцию*.

4.4. Фильтрация

Передаточную функцию рассчитанного фильтра, представленную в виде коэффициентов, согласно теоретическим представлениям, изложенным в главе [Способы задания цифровых фильтров](#), можно использовать для фильтрации временного ряда. Временной ряд можно загрузить из файла командой *Загрузить | Сигнал из файла*. Загружается только первая колонка данных. Необходимо указать частоту оцифровки сигнала в поле *Частота оцифровки*. Важно, чтобы нужная частота оцифровки была задана до расчета фильтра, если фильтр – сложный каскад. Если фильтр простой – очередность установки частоты не важна.

Фильтрацию можно проводить двумя способами, что определяется *Направлением фильтрации*, выбираемым в меню *Фильтрация*.

Фильтрация *В одну сторону* применяет фильтр один раз, в результате чего вносятся желаемые амплитудные изменения и накладываются соответствующие фазовые искажения. Если необходимо избежать фазовых искажений, следует использовать фильтрацию *Туда и обратно*, но при этом амплитудные изменения будут внесены дважды. При необходимости этот факт нужно учитывать при подборе порядка фильтра, уменьшая его порядок вдвое.

Как работает фильтрация, можно наблюдать на тестовом сигнале, который загружается командой *Загрузить | Тестовый свип-сигнал*. Используются следующие параметры тестового сигнала:

- 1) в интервале от 0 до 1 с сигнал имеет нулевой уровень;
- 2) в интервале от 1 до 50 с присутствует синусоида с амплитудой 1 и частотой, постепенно меняющейся от $F_N/2000$ до $F_N/2$, где F_N – частота Найквиста;
- 3) в интервале от 50 до 60 с частота продолжает линейно увеличиваться, но амплитуда линейно уменьшается до 0;
- 4) в интервале от 60 до 100 с сигнал имеет нулевое значение.

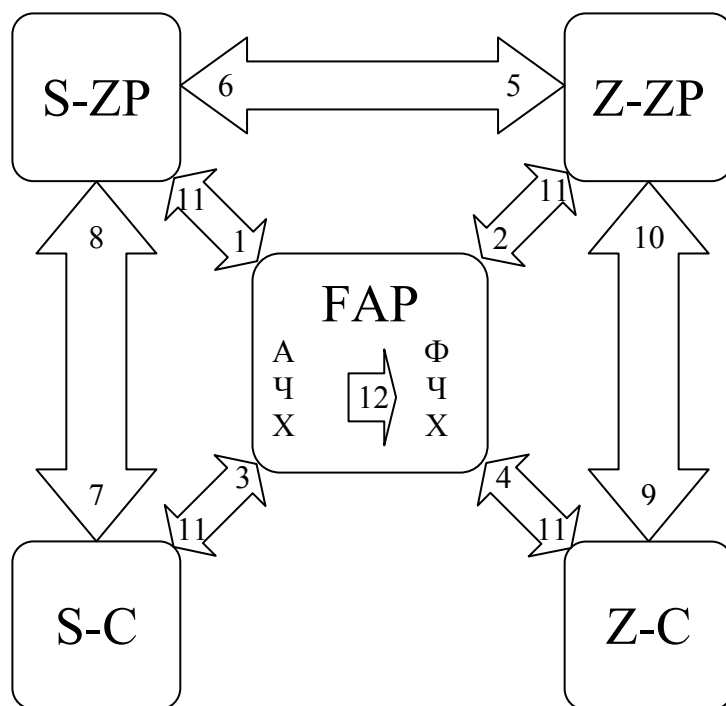
В таком виде частота тестового сигнала имеет привязку к шкале времени (мгновенная частота в Гц равна времени в секундах), в результате чего на тестовом сигнале легко контролировать фильтрацию нужных частот.

4.5. Трансформации передаточных функций

В процессе расчета фильтров в приложении каждый раз обновляются параметры пяти видов представления их передаточных функций (ПФФ): *ZP* на *S*-плоскости, *ZP* на *Z*-плоскости, *C* на *S*-плоскости, *C* на *Z*-плоскости и *FAP* в частотной области. Последний вид представления в принципе реализуем для каждого из первых четырех, но визуализируется одновременно только с одним из них, который в данный момент считается текущим. Обновление всех видов ПФФ при расчете происходит синхронно, так что при выборе любого из

них в качестве текущего их *FAP* будут идентичны друг другу. Идентичность может нарушиться, если после расчета фильтра продолжается изменение текущего представления посредством уточнения аппроксимации или ручной правкой каких-либо параметров. Для восстановления синхронизации ПФФ в приложении реализовано несколько видов преобразований:

1. преобразование передаточной функции, заданной полюсами и нулями на S -плоскости ($S-ZP$), в частотно-дискретный набор амплитуд и фаз (FAP);
2. преобразование передаточной функции, заданной полюсами и нулями на Z -плоскости ($Z-ZP$), в частотно-дискретный набор амплитуд и фаз (FAP);
3. преобразование передаточной функции, заданной коэффициентами каскада биквадратных блоков на S -плоскости ($S-C$), в частотно-дискретный набор амплитуд и фаз (FAP);
4. преобразование передаточной функции, заданной коэффициентами каскада биквадратных блоков на Z -плоскости ($Z-C$), в частотно-дискретный набор амплитуд и фаз (FAP);
5. преобразование полюсов и нулей передаточной функции из S -плоскости ($S-ZP$) в Z -плоскость ($Z-ZP$);
6. преобразование полюсов и нулей передаточной функции из Z -плоскости ($Z-ZP$) в S -плоскость ($S-ZP$);
7. преобразование передаточной функции, заданной полюсами и нулями на S -плоскости ($S-ZP$), в коэффициенты каскада биквадратных блоков ($S-C$);
8. преобразование передаточной функции, заданной коэффициентами каскада биквадратных блоков на S -плоскости ($S-C$) в полюсы и нули ($S-ZP$);
9. преобразование передаточной функции, заданной полюсами и нулями на Z -плоскости ($Z-ZP$), в коэффициенты каскада биквадратных блоков ($Z-C$);
10. преобразование передаточной функции, заданной коэффициентами каскада биквадратных блоков на Z -плоскости ($Z-C$) в полюсы и нули ($Z-ZP$);
11. аппроксимация дискретного набора амплитуд и фаз (FAP) передаточной функцией в четырех вариантах представления ($S-ZP$, $Z-ZP$, $S-C$ и $Z-C$).
12. преобразование АЧХ в ФЧХ.



Рассмотрим способы выполнения и особенности трансформаций более подробно.

На представленной схеме (рис. 4.5.1) можно видеть, какие основные варианты синхронизации обеспечивают непосредственное или опосредованное преобразование одного вида ППФ в другой.

4.5.1. S-ZP → FAP, Z-ZP → FAP, S-C → FAP и Z-C → FAP

Данные преобразования выполняются каждый раз при расчете текущего фильтра. Конкретный вид преобразования зависит от того, что выбрано в качестве **Области отображения** и **Способа представления** фильтра. Если выбрана S-плоскость, то будет выполняться трансформация S-ZP → FAP при способе представления полюсами и нулями и S-C → FAP при способе представления коэффициентами. Если выбрана Z-плоскость, то будет выполняться трансформация Z-ZP → FAP при способе представления полюсами и нулями и Z-C → FAP при способе представления. Расчет фильтра выполняется кнопкой **Рассчитать** или при смене **Типа фильтра** на вкладке **Расчет фильтров**.

Также эти трансформации выполняются по завершению автоматической аппроксимации АЧХ. Однако могут возникнуть ситуации, когда передаточная функция изменяется вручную посредством редактирования нормировочного коэффициента фильтра, перемещения корней на комплексной плоскости или посредством их правки в списках на вкладке **Передаточная функция**. Для этих случаев имеется отдельная команда трансформации – **Текущий фильтр -> Частота, амплитуда, фаза**, доступная из меню **Конвертеры**. При преобразовании, безусловно, важно, что именно выбрано в качестве **Области отображения** и **Способа представления** фильтра (см. выше).

Трансформация в FAP выполняется следующим образом.

На S-плоскости:

Каждому дискретному значению частоты f [Гц] ставится в соответствие комплексная переменная $s = j2\pi f$, для которой рассчитывается комплексное значение передаточной функции $H(s)$.

Амплитуда фильтра на частоте f будет равна модулю $H(s)$

$$A(s) = |H(s)| = \sqrt{H(s).Re^2 + H(s).Im^2} . \quad (4.5.1.1)$$

Фаза будет определяться из соотношения

$$P(s) = \text{arctg}[H(s).Im/H(s).Re]. \quad (4.5.1.2)$$

На Z-плоскости:

Каждому дискретному значению частоты f [Гц] ставится в соответствие зависящая от шага дискретизации Δt [с] комплексная переменная $z = \exp(j2\pi f\Delta t)$, для которой рассчитывается комплексное значение передаточной функции $H(z)$.

Амплитуда фильтра на частоте f будет равна модулю $H(z)$, рассчитываемого с помощью (4.5.1.1). Фаза будет определяться из соотношения (4.5.1.2).

Результат трансформации (**Рассчитанные АЧХ, ФЧХ и ГВЗ**) отображается на диаграмме графиков.

4.5.2. S-ZP → Z-ZP

При выполнении данной трансформации используется теоретическая связь корней на S- и Z-плоскостях (3.2.5.1), лежащая в основе билинейного Z-преобразования.

Однако данная связь полностью применима лишь к полюсам передаточных функций.

Для нулей она справедлива с несколькими замечаниями:

1) при переходе из S-плоскости в Z-плоскость происходит деформация частот, поэтому переменные s , лежащие на мнимой оси и превышающие по модулю порог S_N , соответствующий частоте Найквиста f_N , следует считать равными S_N , иначе значение z будет определяться остатком от деления s на S_N , что физически неверно.

2) количество нулей на S-плоскости может не совпадать с количеством нулей на Z-плоскости. Количество нулей и полюсов на Z-плоскости совпадает.

3) отсутствующий нуль на S -плоскости означает его наличие на бесконечности, что на Z -плоскости, принимая во внимание 1-е замечание, эквивалентно нулю со значением $(-1+0j)$.

Данная трансформация выполняется по команде **S -полюсы и нули \rightarrow Z -полюсы и нули** в меню **Конвертеры**. Результаты трансформации можно увидеть на диаграмме графиков и комплексной плоскости, выбрав на вкладке **Передаточная функция** в качестве области отображения **Z -плоскость** и способ представления **Полюсы и нули**.

4.5.3. Z - $ZP \rightarrow S$ - ZP

При выполнении данной трансформации используется теоретическая связь корней на S - и Z -плоскостях, обратная выражению (3.2.5.1).

Однако данная связь полностью применима лишь к полюсам передаточных функций. Для нулей она справедлива с несколькими замечаниями:

- 1) количество нулей на Z -плоскости может быть больше количества нулей на S -плоскости. Количество нулей и полюсов на Z -плоскости совпадает.
- 2) нуль, имеющий значение $(-1+0j)$ на Z -плоскости соответствует бесконечной частоте на S -плоскости, что означает его отсутствие там.

Данная трансформация выполняется по команде **Z -полюсы и нули \rightarrow S -полюсы и нули** в меню **Конвертеры**. Результаты трансформации можно увидеть на диаграмме графиков и комплексной плоскости, выбрав на вкладке **Передаточная функция** в качестве области отображения **S -плоскость** и способ представления **Полюсы и нули**.

4.5.4. S - $ZP \rightarrow S$ - C , Z - $ZP \rightarrow Z$ - C

Корни физически реализуемых фильтров на S - или Z -плоскости всегда являются комплексно сопряженными, если их четное количество. Если их количество нечетное, то один из корней является вещественным. Это свойство обуславливает возможность объединения отдельных блоков фильтра, содержащих сопряженные комплексные корни, в биквадратные блоки, в результате чего каждая пара комплексных корней заменяется тройкой вещественных коэффициентов a_0 , a_1 и a_2 многочлена 2-го порядка:

$$(z - z_0)(z - z_0^*) = (z - z_0 \operatorname{Re} - j z_0 \operatorname{Im})(z - z_0 \operatorname{Re} + j z_0 \operatorname{Im}) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad (4.5.4.1)$$

где $a_0 = |z_0|^2$, $a_1 = -2 z_0 \operatorname{Re}$, $a_2 = 1$.

Непарный блок с вещественным корнем может использоваться непосредственно, в результате чего он заменяется парой коэффициентов a_0 и a_1 многочлена 1-го порядка:

$$z - z_0 = a_1 z + a_0, \quad (4.5.4.2)$$

где $a_1 = 1$, $a_0 = -z_0$.

Если несколько корней передаточной функции являются вещественными (иногда это характерно для нулей), они объединяются в пары, также образуя биквадратные блоки, с тройками вещественных коэффициентов a_0 , a_1 и a_2 :

$$(z - z_0)(z - z_1) = a_2 z^2 + a_1 z + a_0, \quad (4.5.4.3)$$

где $a_0 = z_0 z_1$, $a_1 = -z_0 - z_1$, $a_2 = 1$.

В конечном итоге получается новый способ представления передаточной функции, который полностью идентичен исходному. Если исходное представление было создано на S -плоскости, то и результирующее тоже находится в этом пространстве. Если на первичное представление было обозначено на Z -плоскости, то новый полином также будет определен на Z -плоскости.

Теоретически также возможно преобразование всей совокупности нулей или полюсов в многочлен K -го порядка, где K – количество нулей или полюсов. Практически такая трансформация в приложении НЕ РЕАЛИЗОВАНА, однако она может выполняться через симметрические полиномы ([Корн, 1968](#)). Так, например, для $K = 4$ эти коэффициенты выражаются следующим образом:

$$\begin{aligned}
a_0 &= -z_1 z_2 z_3 z_4 z_5; \\
a_1 &= z_2 z_3 z_4 z_5 + z_1 z_3 z_4 z_5 + z_1 z_2 z_4 z_5 + z_1 z_2 z_3 z_5 + z_1 z_2 z_3 z_4; \\
a_2 &= -z_3 z_4 z_5 - z_2 z_4 z_5 - z_2 z_3 z_5 - z_2 z_3 z_4 - z_1 z_4 z_5 - z_1 z_3 z_5 - z_1 z_3 z_4 - z_1 z_2 z_5 - z_1 z_2 z_4 - z_1 z_2 z_3; \\
a_3 &= z_4 z_5 + z_3 z_5 + z_3 z_4 + z_2 z_5 + z_2 z_4 + z_2 z_3 + z_1 z_5 + z_1 z_4 + z_1 z_3 + z_1 z_2; \\
a_4 &= -z_1 - z_2 - z_3 - z_4 - z_5;
\end{aligned}
\tag{4.5.4}$$

Преобразование полюсов и нулей в коэффициенты выполняется по команде **Полюсы и нули -> Коэффициенты** в меню **Конвертеры**. Результаты трансформации можно увидеть на диаграмме графиков и комплексной плоскости, выбрав на вкладке **Передаточная функция** в качестве способа представления **Коэффициенты**. В какой плоскости будут трансформированы корни передаточной функции, зависит от **Области отображения**.

4.5.5. S-C → S-ZP, Z-C → Z-ZP

Это преобразование является обратным для трансформации из предыдущей главы и выполняется достаточно просто, поскольку сводится к решению квадратных уравнений, коэффициентами которых являются коэффициенты числителя или знаменателя биквадратных блоков.

Квадратное уравнение при условии, что коэффициент при переменной второй степени не равен нулю, всегда будет иметь два корня (полюсы – для числителя, нули – для знаменателя). Эти корни могут быть либо комплексно сопряженными, либо вещественными и разными, либо вещественными и одинаковыми. Квадратное уравнение, в котором коэффициент при переменной второй степени равен нулю, будет иметь лишь один вещественный корень. Наконец, если квадратное уравнение состоит только из одного свободного члена, оно корней иметь не будет. Способы решения квадратных уравнений хорошо известны и здесь их описание не приводится.

Преобразование коэффициентов в полюсы и нули выполняется по команде **Коэффициенты -> Полюсы и нули** в меню **Конвертеры**. Результаты трансформации можно увидеть на диаграмме графиков и комплексной плоскости, выбрав на вкладке **Передаточная функция** в качестве способа представления **Полюсы и нули**. В какой плоскости будут трансформированы корни передаточной функции, зависит от **Области отображения**.

4.5.6. АЧХ → ФЧХ

Для причинных функций вещественная и мнимая части связаны между собой преобразованием Гильберта ([Канасевич, 1985](#)).

$$\begin{aligned}
F(\omega).Re &= \frac{1}{\pi} \bar{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(w).Im}{\omega - w} dw \\
F(\omega).Im &= \frac{1}{\pi} \bar{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{F(w).Re}{\omega - w} dw
\end{aligned}
\tag{4.5.6.1}$$

Логарифм передаточной функции можно выразить как

$$\ln Y(\omega) = \ln |Y(\omega)| + j\Phi(\omega), \tag{4.5.6.2}$$

где $|Y(\omega)|$ является АЧХ, а $\Phi(\omega)$ – ФЧХ. Если предположить, что импульсная реакция фильтра является причинной, то можно сопоставить $\ln Y(\omega)$ с функцией $F(\omega)$. Следовательно $\ln |Y(\omega)|$ и $\Phi(\omega)$ так же связаны преобразованием Гильберта аналогично функциям $F(\omega).Re$ и $F(\omega).Im$ в уравнении (4.5.6.1).

$$\ln|Y(\omega)| = -\frac{1}{\pi} \bar{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Phi(w) \cdot \text{Im}}{w - \omega} dw$$

$$\Phi(\omega) = \frac{1}{\pi} \bar{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln|Y(\omega)|}{w - \omega} dw$$
(4.5.6.2)

Преобразование АЧХ в ФЧХ выполняется только для загруженных данных по команде **АЧХ -> ФЧХ** в меню **Конвертеры**. Результаты трансформации можно увидеть на диаграмме графиков.

4.5.7. FAP → ZP, C

Преобразование передаточной функции из дискретного экспериментального представления в аналитическое выполняется сразу во все четыре другие способа представления (*S-ZP*, *Z-ZP*, *S-C* и *Z-C*). Данный вид трансформации достаточно прост только для элементарных типов передаточных функций, теоретические представления которых хорошо разработаны. Каждому типу фильтра в приложении соответствует своя команда в меню **Аппроксимация** (ФНЧ, ФВЧ, РФ, СФ, ПФ, ПЗФ). Преобразование в другие типы АЧХ требует поэтапного подхода и комбинирования элементарных типов АЧХ. Процесс уточнения аппроксимации является одним из этапов сложного преобразования. Различные варианты уточнения фильтра доступны из меню **Уточнение**. Комбинирование элементарных фильтров осуществляется посредством формирования каскада. Команды формирования каскада доступны из меню **Каскад**.

Полная информация о данном виде преобразования с подробными советами и рекомендациями дана в главе [Аппроксимация](#).

4.5.8. Другие виды преобразований

Помимо основных видов преобразований, описанных выше, средствами приложения возможно выполнять трансформации несколько иного типа, такие как трансформация частот, интегрирование, дифференцирование, сдвиг фазы.

Трансформация частоты происходит при переводе переменных из *S*-плоскости на *Z*-плоскость. Трансформация из реальной в деформированную шкалу осуществляется согласно выражению

$$f_{\delta} = 1/(\pi \Delta t) \operatorname{tg}(\pi f \Delta t),$$

соответственно обратное преобразование имеет вид

$$f = 1/(\pi \Delta t) \operatorname{arctg}(\pi f_{\delta} \Delta t).$$

Преобразование выполняется на вкладке **Калькулятор**, где также возможно выполнить прямое и обратное билинейное преобразование для одного комплексного числа двумя методами.

Созданный фильтр, представленный полюсами и нулями, имеет форму, удобную для дифференцирования и интегрирования обрабатываемого с его помощью временного ряда. Перед этими операциями необходимо убедиться, что выбран способ нормировки посредством **Множителя ЧХ**.

Дифференцирование выполняется посредством удаления одного нуля из числителя передаточной функции, если она задана полюсами и нулями. Этот нуль должен иметь значение $(0+j0)$, если дифференцирование выполняется на *S*-плоскости или значение $(1+j0)$, если дифференцирование выполняется на *Z*-плоскости. Если таких корней нет, то дифференцирование невозможно.

Если текущим является способ представления передаточной функции с помощью коэффициентов, из ее числителя следует убрать один блок с коэффициентами $b_2=0$, $b_1=1$, $b_0=0$ на *S*-плоскости или коэффициентами $b_2=0$, $b_1=1$, $b_0=-1$ на *Z*-плоскости. Если такие блоки отсутствуют, преобразование следует делать в области полюсов и нулей.

Следует осторожно выполнять дифференцирование через редактирование набора коэффициентов. Стоит иметь в виду, что при уменьшении количества секций всегда удаляется последний блок, при этом удаление происходит одновременно в числителе и знаменателе (особенность реализации фильтра в приложении *DFilter*). Чтобы исключить потерю корней из выражения, предварительно имеет смысл их искусственно увеличить блоками с коэффициентами $a_2=0$, $a_1=0$ и $b_2=0$, $b_1=0$, $b_0=1$, не влияющими на амплитуду и форму ЧХ.

Интегрирование, являясь обратной операцией дифференцирования, с учетом выше сказанного, выполняется так же просто. Для этого в передаточную функцию, заданную полюсами и нулями на S -плоскости добавляется один нуль со значением $(0+j0)$, а на Z -плоскости – нуль со значением $(1+j0)$.

Если текущим является способ представления передаточной функции с помощью коэффициентов, в ее числитель следует добавить один блок с коэффициентами $b_0=0$, $b_1=1$, $b_2=0$ на S -плоскости или коэффициентами $b_0=-1$, $b_1=1$, $b_2=0$ на Z -плоскости. Поскольку количество блоков в числителе и знаменателе должно быть равным (особенность реализации фильтра в приложении *DFilter*), то в знаменатель одновременно следует добавить блок с коэффициентами $a_2=0$, $a_1=0$ не зависимо от плоскости отображения. Эти коэффициенты позволяют сохранить прежнюю форму и амплитуду ЧХ.

Сдвиг фазы – трансформация, реализация которой опирается на свойства Z -преобразований. Известно, что сдвиг фазы в Z -области описывается выражением:

$$H(\omega+\Delta\omega) = H(\omega) z(\Delta\omega) = H(\omega) \exp(-j \Delta\omega). \quad (4.5.8.1)$$

Это означает, что для сдвига ФЧХ на $\Delta\omega$ необходимо всего лишь умножить передаточную функцию на комплексную величину $\exp(-j \Delta\omega)$. К сожалению, такая трансформация с полной степенью свободы может быть реализована только теоретически, а на практике при создании цифрового фильтра для работы во временной области такое преобразование в виде (3.1.4) можно выразить только для $\Delta\omega = \pi$. Поворот фазы на эту величину позволяет сделать множитель $z(\Delta\omega)$ вещественным и равным -1. Таким образом, для сдвига фазовой характеристики на величину π , достаточно сменить знак в нормировочном коэффициенте G_s в (3.1.1), G_z в (3.1.2) или G в (3.1.3). В последнем случае, если передаточная функция задана произведением каскадов полиномиальных блоков (например, биквадратных), аналогичный эффект может быть получен, если на -1 умножить один из блоков числителя.

Чтобы увидеть изменения в ЧХ, произошедшие в результате интегрирования, дифференцирования или сдвига фаз следует синхронизировать ППФ командой **Текущий фильтр - > Частота, амплитуда, фаза** в меню **Конвертеры**. Синхронизация других способов представления описана ранее в предыдущих главах.

При дифференцировании и интегрировании изменяются единицы измерения, характеризующие данный фильтр на выходе. Дифференцирование временного ряда добавляет в единицы измерения на выходе множитель $[1/с]$ или $[Гц]$. Интегрирование добавляет обратные множители: $[с]$ или $[1/Гц]$. Так, если, к примеру, единицами на выходе были скорости смещений $[м/с]$, то после дифференцирования ее следует заменить на ускорение $[м/с^2]$. При интегрировании скорости смещения превращаются в смещения, единицей измерения которых является $[м]$. Если дифференцируемый или интегрируемый фильтр в дальнейшем будет сохранен в файл, изменение его единиц измерения следует отразить в **Сведениях о фильтре** на вкладке **Настройки**.

5. Литература

1. Давыдов А.В. Цифровая обработка сигналов: тематические лекции. Екатеринбург: УГГУ, ИГиГ, ГИН, Фонд электронных документов, 2005.
2. Канасевич Э.Р. Анализ временных последовательностей в геофизике. – М.: Недра, 1985. – 300 с.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. – М.: Наука, 1968. С.38.
4. Хемминг Р.В. Цифровые фильтры. – М.: Недра, 1987. – 221 с.
5. Smith S.W. The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing. San Diego, 1999. 650 p.